Setze $f_n(z) = c_n n (z-z_0)^{n-1}$ $\left(= f_n'(z)\right)$

$\overset{\text{Weierstr.}}{\Longrightarrow}$ $\|f_n\|_\infty \le n M \Theta^{n-1}$

$\overset{\boxed{1}\,4.23}{\Longrightarrow}$ $\sum \|f_n\|_\infty$ konv.

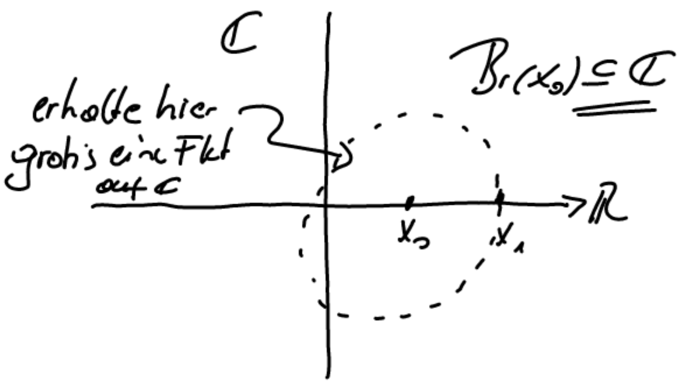
$\underset{\text{Weierstraß}}{\overset{1.17}{\Longrightarrow}}$ $\sum f_n$ konv. abs & glm auf $K_r(z_0)$ $\square$

QT: $\dfrac{(n+1)M\Theta^n}{nM\Theta^{n-1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Theta \longrightarrow \Theta < 1$

$\boxed{1}$ 4.23

2.7 Bem (Fortsetzung ins Komplexe – Funktionentheorie)

Prop 2.5 hat folgende interessante Auswirkung auf reelle PR $\sum a_k(x-x_0)^k$. Ist die PR nämlich in einem reellen Pkt $x_1 \neq x_0$ konvergent, so konvergiert sie auch schon auf einer ganzen Kreisscheibe in $\mathbb{C}$. So



können reelle Fkt, die durch Potenzreihen dargestellt werden ins Komplexe fortgesetzt werden. In diesem Sinne ist die komplexe Exponentialfkt die Fortsetzung der reellen Expfkt nach $\mathbb{C}$ [vgl. $\boxed{2}$ 3.13]; genauer

$$\exp(x) = \sum \frac{x^k}{k!} \text{ konv. } \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exp(z) := \sum \frac{z^k}{k!} \text{ konv } \forall z \in \mathbb{C}$$

Das systematische Studium der durch Potenzreihen darstellbaren Fkt – der sogenannten analytischen Fkt – ist ein Hauptthema der komplexen Analysis, die auch Funktionentheorie genannt wird.

2.8 MOTIVATION (Größter Konvergenzkreis)

Prop 2.5 hat den „Schönheitsfehler", dass man zuerst wissen muß, dass in einem bestimmten Pkt z_1 Konvergenz vorliegt, um irgendwelche Schlüsse ziehen zu können. Das führt auf die Frage, ob wir nicht gleich einen maximalen Konvergenzkreis finden können.

Wir werden zunächst diesen „Konvergenzradius" definieren und Prop 2.5 mit seiner Hilfe umformulieren. Dann kümmern wir uns darum, wie man den Konvergenzradius praktisch berechnen kann.

2.9 DEF (Konvergenzradius)

Für eine Potenzreihe $\sum a_k(z-z_0)^k$ definieren wir den Konvergenzradius R als

$$R := \sup\left\{r \in [0,\infty) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \text{ konv. in } K_r(z_0)\right\}.$$

2.10 PROP (Konvergenz von PR – zum Zweiten)

Sei R der Konvergenzradius der PR $\sum a_k(z-z_0)^k$. Dann gilt

(i) Ist $R=0$, dann konvergiert die PR nur im Pkt z_0

(ii) Ist $R=\infty$, dann konvergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ und die Konvergenz ist glm auf jeder abg. Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)}$ mit $0<r<\infty$

[Sie konvergiert i.A. nicht glm auf $\mathbb{C}$!]

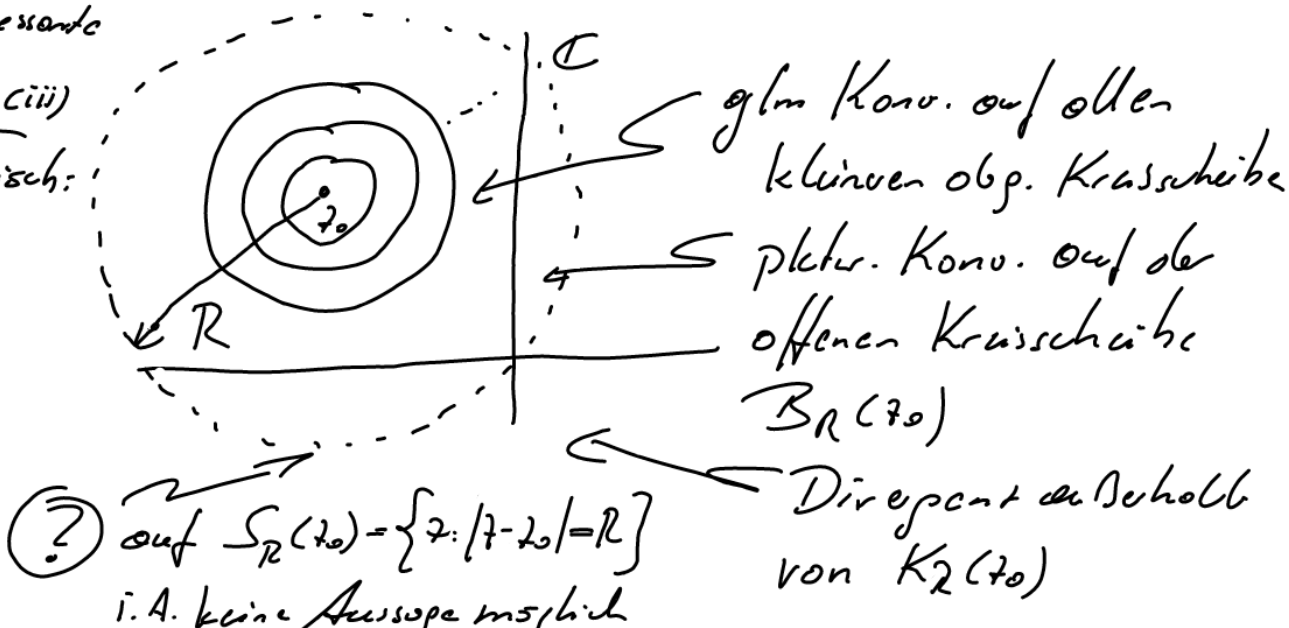
(iii) Gilt $0<R<\infty$, dann

- konvergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$ und die Konvergenz ist abs. & glm. auf jeder abg. Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit $0<r<R$

- divergiert die PR $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$

[Für „Randpkte" z mit $|z-z_0|=R$ ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich.]

Der interessante Fall (iii) graphisch:



Beweis. [Im Wesentlichen Umformulierung von 2.5]

(i) klar nach Def von R

(ii) klar wegen 2.5 & 2.6 [Weil $R=\infty$ kann für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein passendes z_1 mit $|z-z_0|<|z-z_1|$ gewählt werden, sodass in z_1 Konvergenz vorliegt; dann wende 2.5 an]

(iii) • Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$

$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<|z_1-z_0|<R$

$\overset{2.9}{\Longrightarrow}$ PR konv in z_1

$\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ PR konv in z

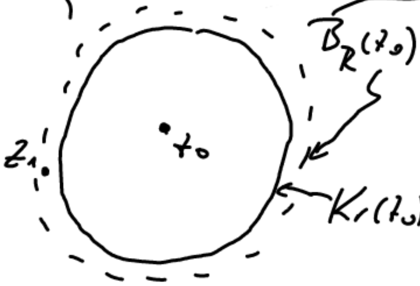
Es kann immer ein z_1 gefunden werden, das näher bei $S_R(z_0)$ liegt

• Sei $0<r<R$

$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$ $\quad r<|z_1-z_0|<R$

$\overset{2.9}{\Longrightarrow}$ PR konv in z_1

$\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ PR konv. glm auf $K_r(z_0)$



• Sei schließlich $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$

$\Rightarrow$ PR konv. nicht in z, denn sonst Wid zur Def von R

[genauer: ang PR konv in $z \overset{2.5.}{\Longrightarrow}$ PR konv auf $K_r(z_0)$ $\forall r<|z-z_0|$. Insbes $\exists r$ mit $R<r<|z-z_0|$ und PR konv auf $K_r(z_0)$ ↯ zur Def von R]

2.11 BSP (Konvergenzradius – aus der Def)]

Wir betrachten die PR aus 2.3(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

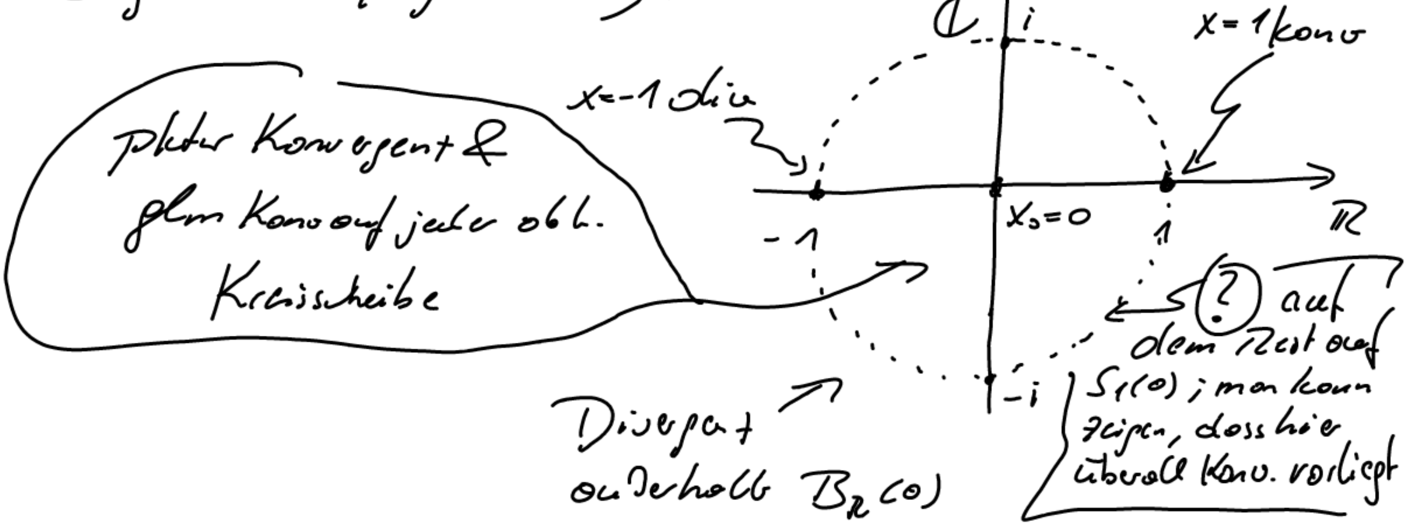
Für $x=1$ erhalten wir die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, also die alternierende harm. Reihe, also konv.

$\Longrightarrow R \geq 1$

Für $x=-1$ erhalten wir die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum \frac{1}{n}$, die divergiert [harm. Reihe [1] 4.7(ii)] $\Rightarrow R \leq 1$

Also gilt insgesamt für den Konvergenzradius $\underline{\underline{R=1}}$

Es ergibt sich folgendes Bild



Hier war es relativ mühsam R zu bestimmen. Abhilfe schafft die folgende Prop [vgl. 2.8]

2.12 PROP (Berechnung des Konvergenzradius)

Sei R der Konvergenzradius der PR $\sum c_k (z-z_0)^k$.

(i) Es gilt (die Formel von Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$$

limsup (a_n) ist der größte Hw von a_n; siehe [1] Def 3.13

wobei wir $R=0$ setzen, falls $\limsup = \infty$ und $R=\infty$, falls $\limsup = 0$

(ii) Falls $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ konvergiert, dann gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Beweis Wir schreiben $\sum c_n (z-z_0)^n = \sum a_n$, also $a_n = c_n (z-z_0)^n$.

(i) [Anwendung des WT [1] 4.21] Es gilt $|a_n|^{1/n} = |c_n|^{1/n} |z-z_0|$

Sei nun $L = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \in (0,\infty)$

(unabhängig von n!)

Wir zeigen

(1) $1/L \le R$: Sei $|z-z_0| \le r < 1/L$

$$\Rightarrow \limsup |a_n|^{1/n} = L\,|z-z_0| \le L\cdot r < 1$$

$$\Rightarrow |a_n|^{1/n} < 1 \text{ für fast alle } n$$

$$\overset{WT}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ konv} \Rightarrow 1/L \le R$$

(2) $1/L \ge R$: Sei $|z-z_0| \ge c/L$ mit $c > 1$

$$\Rightarrow \limsup |a_n|^{1/n} = L\,|z-z_0| \ge c > 1$$

$$\Rightarrow |a_n|^{1/n} \ge 1 \text{ für unendlich viele } n$$

$$\overset{WT}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ divergiert } \underset{c>1 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} R \le 1/L$$

Also gilt $R = 1/L$ falls $0 < R < \infty$. In den Grenzfällen gilt: $L = 0$: setze in (1) $r > 0$ beliebig $\Rightarrow R = \infty$

$L = \infty$: setze in (2) $|z-z_0| \ge \varepsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow R = 0$$

(ii) [Anwendung des QT [1] 4.23]

Sei $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ dann liefert der QT

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}|}{|c_n\,(z-z_0)^n|} = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |z-z_0| \longrightarrow \frac{|z-z_0|}{\rho} \quad (n\to\infty)$$

also Konv, falls $|z-z_0| < \rho$; Div., falls $|z-z_0| > \rho \Rightarrow R = \rho$

2.13 Bsp (Konvergenzradius)

(i) nochmals 2.3(iii) also $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Wir wissen aus 2.9, dass $R=1$, wollen das aber nochmals mittels 2.12 berechnen.

Hadamard: $|c_n|^{1/n} = \left|\frac{1}{n}\right|^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ [UE, Blatt 3 Nr. $\boxed{7}$]

QT: $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} \to 1$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ (reelle PR mit $x_0=0$, $a_n = n!$) Es gilt

$R = \lim \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

und die Reihe konvergiert nur im Nullpkt [(i) in 2.10]

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ also die Cosinusreihe [$\boxed{2}$ 3.17 (v)] und

es gilt $x_0 = 0$, $c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & n \text{ gerade} \end{cases}$

ACHTUNG $\longrightarrow$

Wir wissen schon aus [1] 3.17, dass diese Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert also gilt $R = \infty$.

Daher liefert uns die Hadamard-Formel

$0 = \limsup |c_n|^{1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ also $\sqrt[n]{n!} \to \infty$.

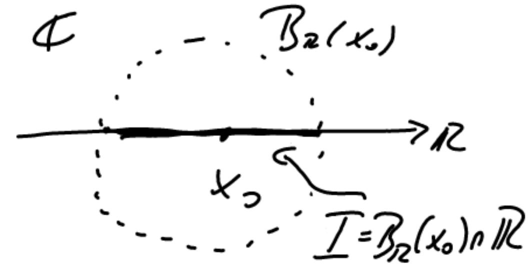
(iv) Siehe [UE, Blatt 1 $\boxed{14}$, $\boxed{15}$]

nette Grenzwert, hatten wir noch nicht

2.14 MOTIVATION (PR im Reellen).

Wenn alle Koeffizienten und der Entwicklungspunkt einer PR reell sind $[c_k = a_k \in \mathbb{R},\ z_0 = x_0 \in \mathbb{R}]$, dann definiert sie auf dem Durchschnitt ihres Konvergenzkreises $B_R(x_0)$ mit $\mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

Wir werden jetzt sehen, dass es sich dabei um besonders schöne Fkt handelt – nämlich beliebig oft differenzierbare Fkt. Außerdem



„dürfen" diese PR gliedweise differenziert und integriert werden [vgl. UE, Blatt 10/5]], d.h. die gliedweise differenzierte/integrierte Reihe konvergiert gegen die Ableitung/das Integral der Grenzfkt.

2.15 PROP (reelle PR)

d.h. $x_0 \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{R}\ \forall k$

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ eine reelle PR mit Konv.radius R. Wir setzen $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ und $f: I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k.$$

$f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})\ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt

(i) f ist beliebig oft differenzierbar; wir schreiben $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$

(ii) Für alle $x \in I$ gilt $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$

(iii) Für alle $a, b \in I$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b$

Beweis [nur Einsammeln früherer Resultate]

(i)+(ii): $\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ $\forall 0<r<R$ ist die PR & die gliedweise differenzierte PR auf $[x_0-r, x_0+r]$ glm konv.

$\overset{1.24}{\Longrightarrow}$ f ist $\mathcal{C}^1$ und die Formel in (ii) gilt.

Wende nun sukzessive dieselbe Argumentation auf $f', f'', f^{(3)}$ usw an $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$

(iii): Folgt sofort aus 2.5 & 1.20

[2.5 $\Rightarrow$ PR konv. glm auf jedem $[a,b]$, $a,b \in I$

1.20 $\Rightarrow \int\limits_a^b \sum\limits_{n=0}^\infty a_n (x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^\infty \int\limits_a^b a_n (x-x_0)^n \, dx$]

$\square$

2.16 BSP (Wiedereinmal sin & cos)

(i) $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ [[2] 3.17(v), bzw 2.13(iii)]

$2.15 \Rightarrow \underline{\cos'(x)} = \sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{2k\, x^{2k-1}}{(2k)!}$

$\overset{[l=k-1]}{\leadsto} = -\sum\limits_{l=0}^\infty (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \overset{[2]\,3.17(v)}{=} \underline{-\sin(x)}$

Also die gliedweise differenzierte Cosinus-Reihe gibt tatsächlich die Sinus-Reihe ;-)

(ii) [UE, Blatt 19 [5]]

2.17 RÜCKBLICK & AUSBLICK.

Wir haben also tatsächlich das Versprechen aus 1.25 eingelöst: Vertauschen von Limes & Abl bzw. Integral funktioniert für Potenzreihen perfekt. Darüberhinaus passen sich diese Resultate gut in unser bisheriges Wissen ein [vgl. 2.16].
Insgesamt haben wir gesehen, dass (reelle) PR sehr schöne Fkt ergeben. Im nächsten § drehen wir den Spieß um und versuchen eine gegebene (schöne) Fkt in eine PR zu entwickeln, sprich sie durch Polynomfunktionen anzunähern.

§3 DER SATZ VON TAYLOR

3.1 MOTIVATION (Rekonstruktion einer Fkt aus ihren Abl. an einem Pkt)

In §2 haben wir gesehen, dass PR sehr gut handhabbar sind und die Approximation von Fkt durch Polynome formalisieren. Hier wollen wir nun eine gegebene glatte Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ in eine PR entwickeln – sprich approximierende Polynome finden. Dazu sei $x_0 \in I$. Wir ziehen den HsDI als Werkzeug heran.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f'(t)}_{= -\left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t)}\, dt \quad [\text{TRICK!?}]$$

$$= f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \left(\frac{d}{dt}(x-t)\right) f'(t)\, dt$$

$$\overset{\text{partielle Integr.}}{=} f(x_0) - (x-t) f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt$$

$$= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{Tangente in } (x_0, f(x_0)) \\ \hat{=}\ \text{Polynom vom Grad 1}}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt}_{\substack{\text{„Rest" als Integral} \\ \text{wegen lin. Bestapprox.} \\ \text{hoffentlich gut abschätzbar}}}$$

Das ist also eine gewünschte Darstellung der Form $f(x) =$ Polynom vom Grad 1 + Rest. Wir können nun aber noch weitermachen und im Restterm nochmals part. Integrieren:

Trick zum Zweiten

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{d}{dt}(x-t)^2\right)f''(t)\,dt$$

f' $\int$

part. Int

$$\overset{}{=} -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}f''(t)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

Also insgesamt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + \frac{1}{2}\int_{t}^{x_0}(x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

Rest in Integralform

Das ist nun eine Darstellung f = Polynom vom Grad 2 + Rest.
Natürlich können wir induktiv weitermachen und erhalten:

3.2 PROP (Taylorformel – zum Ersten)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{n+1}$-Fkt und sei $x_0 \in I$ beliebig.
Dann gilt für alle $x \in I$ die Taylor-Formel

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

Polynom vom Grad n mit Koeff gegeben durch die Ableitungen von f in x_0

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

„Rest"

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Beweis. Wir verwenden die Notation $T_n[f,x_0](x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.
Damit ist zu zeigen, dass ($n\in\mathbb{N}$)

$$f(x)=T_n[f,x_0](x)+R_{n+1}(x).$$

Induktion nach n: Den Induktionsanfang für $n=0$ bzw $n=1,2$ erledigt 3.1.

$n-1\mapsto n$: Wir nehmen an, dass $f(x)=T_{n-1}[f,x_0](x)+R_n(x)$ gilt. Wir integrieren den Restterm $R_n(x)$ partiell. Es gilt

$$R_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{=-\frac{1}{n}\frac{d}{dt}(x-t)^n}f^{(n)}(t)\,dt$$

Trick zum Dritten bzw n-ten

$$=-\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Wir machen obige Bezeichnung offiziell

3.3 DEF (Taylor-Polynom & Taylor-Reihe)
Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine C^{n+1}-Fkt und sei $x_0\in I$ beliebig.

(i) Für $m\le n$ definieren wir das Taylor-Polynom der Ordnung m von f im Pkt x_0 als

$$\boxed{T_m[f,x_0](x):=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

(ii) Falls f glatt ist, definieren wir die Taylor-Reihe von f im Pkt x_0 als

$$T[f,x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

und zwar unabhängig davon, ob $T[f,x_0](x)$ konvergiert oder nicht.

3.4 BEOBACHTUNG (Taylorreihe ist PR)

Offensichtlich ist eine Taylorreihe eine PR und somit gilt für die Konvergenz von TR alles, was wir in §2 über die Konv. von PR herausgefunden haben.

3.5 BSP (Die Taylor-Reihe für exp)

(i) Wir betrachten $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$. Es gilt $f^{(k)}(x)=e^x$ und daher

$$T_n[\exp,0](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} e^0 (x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$T[\exp,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

Die Taylor-Reihe für exp in $x=0$ ist also gerade die Exponentialreihe. Wegen [2] 4.36 gilt

$$T_n[f,0](x) \to \exp(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$T_n[f,0]$ konv. also auf ganz $\mathbb{R}$ pktw gegen exp. Daher ist der Konvergenzradius $R=\infty$ und wegen 2.10(ii) ist die Konv. sogar glm. auf jedem abg. Intervall $[-m,m]$ $(0<m<\infty)$ [1.9, 1.18]

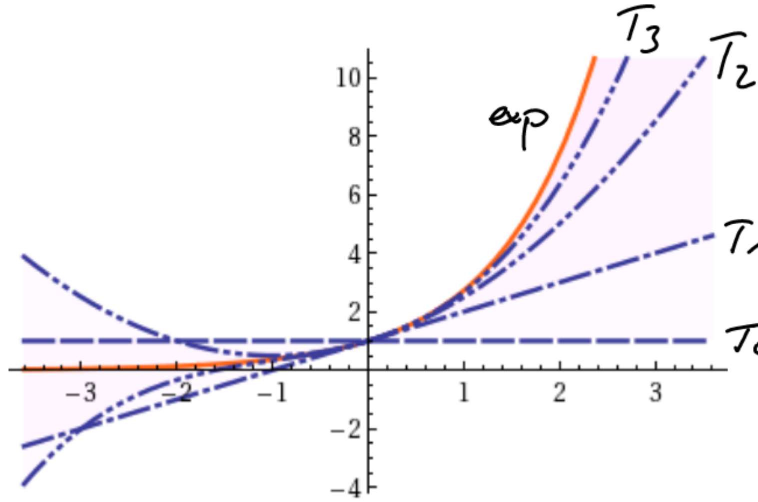
(ii) Wir erhalten also genau das Bild aus 1.1(iv) – allerdings mit der zusätzlichen Information, wie wir die approximierenden Polynome aus f berechnen können.

$T_0[\exp, 0](x) = 1$

$T_1[\exp, 0](x) = 1 + x$

$T_2[\exp, 0](x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

usw.



3.6 MOTIVATION (Konvergenz der Taylor-Reihe)

(i) Im obigen Bsp ist die Taylorreihe eine gute Approximation für die ursprüngliche Fkt $f = \exp$. Ihre Vorzüge sind, dass

(1) die approximierenden Fkt $T_n[f, x_0]$ Polynome – also die einfachsten Fkt sind

(2) Die approximierenden Fkt $T_n[f, x_0]$ ganz leicht und explizit aus f berechnet werden können – mittels der Ableitungen von f an dem einzigen Pkt x_0.

(3) Die Taylorreihe $T[f, x_0]$ als PR gute Konvergenzeigenschaften aufweist.

(ii) Damit sind aber noch immer wichtige Fragen bzgl der Konv. von TR offen, nämlich

(1) Konvergiert die TR immer (außer natürlich in x_0), d.h. ist ihr KR $R > 0$?

(2) Falls die TR $T_n[f, x_0]$ überhaupt konvergiert, konvergiert sie dann auch gegen f? Diese Frage ist (offensichtlich vgl. 3.2) äquivalent zur Frage, ob das Restglied R_n gegen 0 konvergiert.

Um diese Fragen besser untersuchen zu können, geben wir eine alternative Form des Restglieds an.

3.7 KOR (Lagrange-Form des Restglieds)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{n+1}$-Fkt und sei $x_0 \in I$. Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x) \quad \text{und}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beweis. [Anwenden des MWS-$\int$ auf die Integralform des Restglieds $R_{n+1}(x)$ in 3.2]

Wegen [4] 1.22 $\exists \xi \in [x_0, x]$ mit:

$$R_{n+1}(x) \overset{3.2}{=} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{[\geq 0! \Rightarrow [4]\ 1.22 \text{ anwendbar}]} f^{(n+1)}(t)\,dt \overset{[4]\ 1.22}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt$$

$$\overset{\text{INT}}{=} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left. \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right|_{x_0}^{x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\square$

[Jetzt fällt uns das Hauptresultat des § in den Schoß]