3.8 THM (Taylor) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ glatt und sei $x_0 \in I$.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei für das Restglied gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

für ein $\xi \in [x_0, x]$.

(ii) Für $x \in I$ konvergiert die Taylor-Reihe $T[f, x_0](x)$ gegen $f(x)$ d.h.

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-x_0)^k$$

genau dann, wenn $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ gilt

3.9 BSP (Exponentialreihe-Restgliedabschätzung)

Wir wissen schon aus 3.5 dass, $T_n[\exp, 0](x) \to \exp(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Daher muß $R_n(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten. Das läßt sich direkt verifizieren

$$R_n(x) = \exp(\xi) \frac{x^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

3.10 BSP (Reihenentwicklung des Logarithmus) [vgl. UE 1812]

log(x) um $x_0=0$ zu entwickeln ist offensichtlich keine gute Idee – daher log(1+x)

Wir betrachten $f(x)=\log(1+x)$, $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ und entwickeln um $x_0=0$.

Es gilt

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

induktiv ergibt sich

$$\underbrace{f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}}\qquad (n\geq 1)$$

Damit erhalten wir $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)/k!=(-1)^{k-1}/k$ und daher

$$T[f,0](x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$

Diese Reihe sind wir schon in §2 begegnet und haben in 2.11 und 2.13(i) den KR $R=1$ berechnet, wobei in $x=-1$ Divergenz und in $x=1$ Konvergenz vorliegt.

Um zu überprüfen, ob $T[f,0]$ auch gegen $f=\log(1+.)$ konvergiert müssen wir das Restglied abschätzen.
Zunächst betrachten wir den Fall $\underline{0<x\leq 1}$ und somit $0\leq\xi<x$

$$\underline{|R_n(x)|}=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\underbrace{(1+\xi)^n}_{\geq 1}}x^n\right|\leq\frac{|x|^n}{n}\leq\frac{1}{n}\xrightarrow{}0\quad(n\to\infty)$$

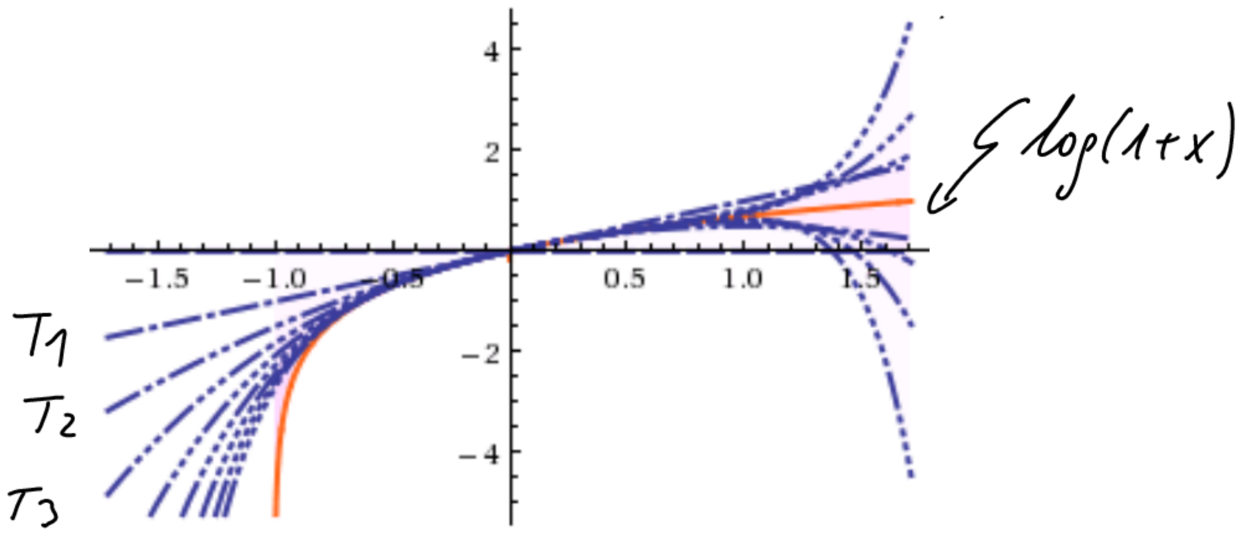
Für $-1<x<0$ und somit $-1<x\leq\xi\leq 0$

$$\underline{|R_n(x)|}\leq\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\underbrace{\left(\frac{x}{1+\xi}\right)}_{|\,|\leq|x/1+x|\leq 1}{}^{n}\right|\leq\frac{1}{n}\xrightarrow{}0\quad(n\to 0)$$

Insgesamt erhalten wir also für $-1 < x \le 1$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots}$$

Speziell für $x=1$ ergibt sich $\underline{\log(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots}$



(order n approximation shown with n dots)

Schließlich können wir auf diese Weise auch $\log(y)$ für $y > 2$ berechnen. Dazu wähle $0 < x < 1$ und $r > 1$ sodass $y = (1+x)^r$. Dann gilt $\log(y) = r \log(1+x)$.

3.11 WARNUNG (Fehlverhalten der Taylorreihe)

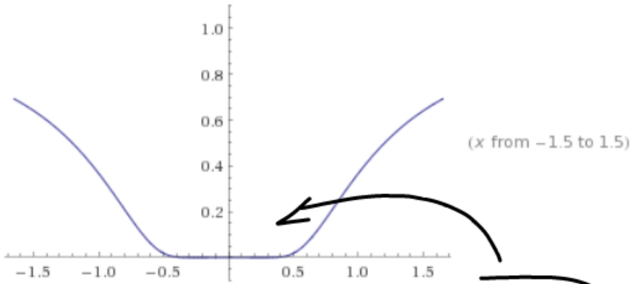
(i) Eine Taylorreihe muss außer im Entwicklungspunkt x_0 garnicht konvergieren; das entspricht einem KR $R=0$ [vgl. 2.10 (i)]

(ii) Selbst, falls die TR konvergiert, muss sie nicht gegen die ursprüngliche Fkt konvergieren,

wie das folgende Bsp zeigt

3.12 Bsp $\left(\exp(-1/x^2)\right)$ Wir betrachten die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



sehr flach bei $x=0$

Wir zeigen zunächst $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Wir zeigen mittels Induktion, dass $f \in C^n(\mathbb{R})$ $\forall n$ und $f^{(n)}(0) = 0$. Dazu behaupten wir:

$$\exists \text{ Polynom } p_n \text{ sodass } f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)\, e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Daraus folgt dann die Aussage, denn $p_n(1/x)e^{-1/x^2} \underset{y := \frac{1}{x}}{=} p_n(y)/e^{y} \to 0$ [[2] 3.8(ii)].

Für $n=0$ ist $(*)$ erfüllt [mit $p_0 = 1$]

$n \mapsto n+1$. Sei $x \neq 0$, dann gilt

$$f^{(n+1)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} \left(p_n(1/x)\, e^{-1/x^2}\right)'$$

$$\overset{\text{KR}}{=} p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)e^{-1/x^2} + p_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\tfrac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2}$$

$$= \left(p_n'\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) + p_n\left(\tfrac{1}{x}\right)\tfrac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2} =: p_{n+1}\left(\tfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

Damit gilt nun $T[f,0](x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

was natürlich $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergent ist, aber

$$T[f,0](x) \neq f(x) \quad \text{für } x \neq 0$$

FAZIT: f ist bei 0 so flach, dass $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k$ und daher verschwindet die Taylorreihe – nicht aber die Fkt

3.13 Bsp (Die Binomialreihe) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$\underbrace{f: (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha}$$ und entwickeln nach Taylor in $x_0 = 0$

- Es gilt $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ $(k \in \mathbb{N})$, daher gilt $f^{(k)}(0)/k! = \binom{\alpha}{k}$ und somit für die TR

$$\boxed{T[f,0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$$

- Die Reihe konvergiert $\forall\, |x|<1$ absolut wegen QT

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|}_{\to 1} |x| \to |x| < 1$$

- Die TR konvergiert auch gegen f falls $|x|<1$, denn
  - für $0 \leq x < 1$ gilt mit $\xi \in [0,x]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = \binom{\alpha}{n} (1+\xi)^{\alpha-n} x^n$$

Falls nun n so groß, dass $\alpha - n < 0 \Rightarrow (1+\xi)^{\alpha-n} < 1$

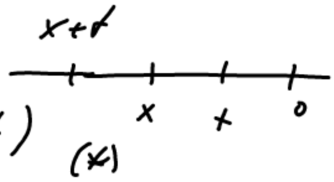
Weil $T[f,0](x)$ abs konv $\Rightarrow \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \to 0$ [Nullf-Test]

$$\Longrightarrow |R_n(x)| \leq \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \to 0$$

  - für $-1 < x < 0$ verwenden wir die Integralform von R_n und erhalten (subst $t \mapsto -t$)

$$R_n(x) = n\binom{\alpha}{n} \int_0^{|x|} (x+t)^{n-1} (1-t)^{\alpha-n}\, dt$$

Nun gilt für $0<x$, $0\le t\le |x|<1$



$$|x+t| = |x| - t \le |x| - |x|t = |x|(1-t) \quad (*)$$

und $$n\binom{\alpha}{n} = n\,\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 2} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} \quad (**)$$

Damit also

$$|R_n(x)| \overset{(*)}{\le} \left|n\binom{\alpha}{n}\right| |x|^{n-1}\int_0^{|x|}(1-t)^{n-1}(1-t)^{\alpha-n}\,dt$$

$$\overset{(**)}{=} \left|\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}\right| |x|^{n-1}\int_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$

$$= \underbrace{|\alpha|\int_0^{|x|}(1-t)^{\alpha-1}\,dt}_{\text{unabhängig von } n}\ \underbrace{\left|\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right|}_{\to 0\ (n\to\infty)}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \quad (|x|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$$

3.14 MOTIVATION (Taylor & Theorie)

Nach diesen praktischen & praktisch wichtigen Bsp. [vielleicht weitere in den UE] verwenden wir den Satz v. Taylor auch als Werkzeug um die Theorie weiter zu entwickeln. Konkreter beweisen wir ein einfaches Werkzeug um Polynome zu entlarven und widmen uns schließlich der Frage nach dem Zusammenhang von PR und TR.

3.15 BEM (Polynome & verschwindende Ableitungen)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, d.h. $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Dann gilt $f^{(n+1)}(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
[Mittels leichter Induktion $(x^n)^{(k)}=n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k}$
falls $n\leq k$ also insbes. $(x^n)^{(n)}=n!$ und $(x^n)^{(n+1)}=0$
vgl. auch UE, Blatt 12 [8]]

Polynome haben also die Eigenschaft, dass eine und damit alle Ableitung ab einer gewissen Ordnung verschwinden.

Umgekehrt, falls eine Fkt $f\in\mathcal{C}^\infty$ diese Eigenschaft besitzt, dann muß f schon ein Polynom gewesen sein – das ist eine Konsequenz des Satzes von Taylor wie wir gleich sehen werden.

Zusammengefaßt gilt also für $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\boxed{f \text{ Polynom} \iff \exists k \text{ mit } f^{(k)}(x)=0\ \forall x}$$

3.16 KOR (Fkt mit verschw. Abl. sind Polynome)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal diffbare Fkt. Falls $f^{(n+1)}(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n.

Beweis: $f^{(n+1)}=0 \Rightarrow f^{(n+1)}$ stetig $\Rightarrow f\in\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$
und wir können 3.2 verwenden; $f^{(n+1)}=0 \Longrightarrow R_{n+1}=0$
$\overset{3.2}{\Longrightarrow} f(x)=T_n[f,0](x)$ ein Polynom. $\square$

3.17 MOTIVATION (Welche Fkt haben eine Taylorentwicklung?)

Sei f eine glatte Fkt auf $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach 3.2 besitzt dann f eine Taylorreihe $T[f, x_0]$.
Diese muß aber außerhalb von x_0 nicht konvergieren und selbst wenn $T_n[f, x_0](x)$ konvergiert, ist nicht gesagt, dass $T_n[f, x_0](x) \to f(x)$ gilt [vgl. 3.11, 3.12]

z.B. ist $f(x) = e^{-1/x^2}$ (mit 0 in $x=0$ ergänzt) eine C^∞-Fkt, die nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt wird – man sagt auch f hat keine Taylorsche Entwicklung.

Es stellt sich nun die Frage, welche Funktionen eine Taylorsche Entwicklung haben. (Es können nicht alle C^∞-Fkt sein!)
Eine endgültige Antwort auf diese Frage ist erst im Rahmen der komplexen Analysis möglich. An dieser Stelle können wir aber festhalten, dass die Summenfkt von PR (diese sind ja nach 2.15 (i) C^∞) eine Taylorsche Entwicklung haben – und zwar gerade die PR durch die sie definiert werden, genauer

3.18 KOR (PR sind ihre eigenen TR)

Sei $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0} a_k (x - x_0)^k$ durch eine reelle PR [$x_0, a_k \in \mathbb{R}$] mit Konvergenzradius R gegeben.
Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

3.19 BEM (zur Bedeutung von 3.18)

Die etwas sperrige Aussage von 3.18 bedeutet insbesondere

(i) Falls f nicht nur eine beliebige $\mathcal{C}^\infty$-Funktion ist, sondern sogar die Summenfkt einer Potenzreihe, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

dann konvergiert die TR von f gegen f – weil nach 3.18 die TR ja genau die PR ist.

(ii) Die Koeffizienten einer PR sind eindeutig bestimmt; genauer gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, dann gilt laut 3.18 für die a_k

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

[Diese Aussage bzw genauer: Seien $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$ zwei PR mit pos KR und $f(x) = g(x)$ für $|x-x_0| < \alpha$ für ein geeignetes α. Dann gilt $a_k = b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. wird oft als Identitätssatz für PR bezeichnet.]

Beweis. 2.15(i) $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^\infty((x_0-R, x_0+R))$ und sukzessives Anwenden der Ableitungsformel 2.15(ii) liefert

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \, k(k-1)\cdots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}.$$

Für $x = x_0$ folgt

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$$

$\square$

STATT §4: FOURIER-REIHEN IN ALLER KÜRZE

(1) Was sind und was sollen FR?

Grundthema von Kap. 15]

Approximation (schöner) Fkt durch (einfache) Bausteine.

TR: glatte Fkt durch Polynome

FR: periodische Fkt durch trigonometrische Polynome

$f(x+2\pi) = f(x) \; \forall x$ — Periodenlänge egal — 2π bequem

Grund- & Oberschwingungen

FR sind Grundlage der FOURIER-ANALYSIS

viele Anwendungen (Elektrotechnik, Musik, Medizin)

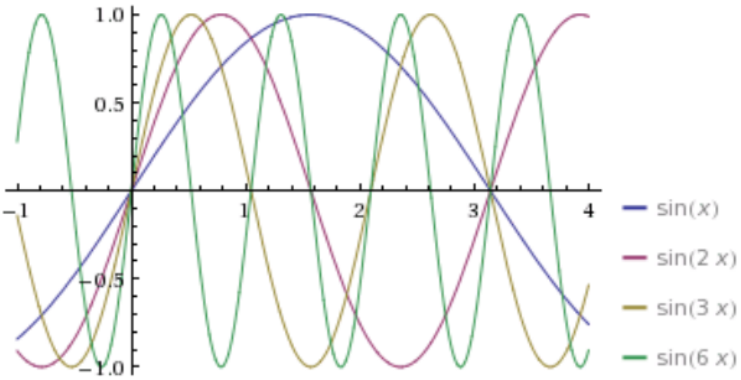
wichtige theoretische Konzepte im Rahmen der FUNKTIONALANALYSIS (Harmonische Analysis, Zeit-Frequenz Analysis)

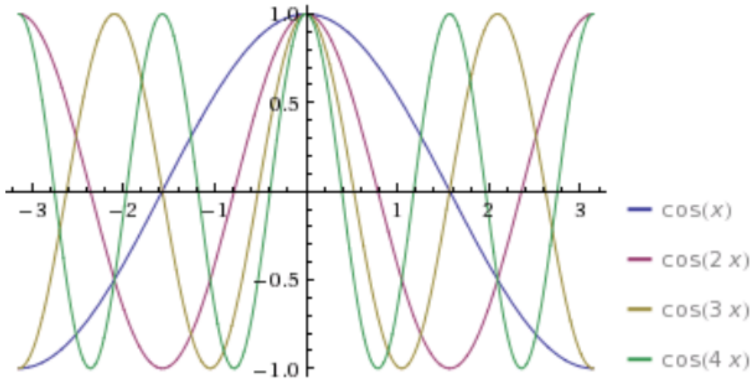
Grundthema: Zerlegen periodischer „Signale" in „Frequenzanteile"

bzw. Annähern periodischer „Signale" durch einfache „Frequenzbausteine" bei vertretbarem Fehler

(2) Die Grundbausteine: Die einfachsten 2π-periodischen

Fkt sind: $\sin$ & $\cos$; $\sin(kx)$, $\cos(kx)$





Kombinationen davon heißen trigonometrische Polynome

bequeme Konvention

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

Beobachtung: Die Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ können aus p_n zurückgewonnen werden – genauer gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_n(x)\cos(kx)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p_n(x)\sin(kx)\,dx \qquad (*)$$

$$\Bigg[\int_0^{2\pi} p_n(x)\sin(kx)\,dx = \int_0^{2\pi}\Big[a_0/2 + \sum_{l=1}^{n}\left(a_l\cos(lx) + b_l\sin(lx)\right)\Big]\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx + \sum a_l \int_0^{2\pi}\cos(lx)\sin(kx)\,dx + \sum b_l \int_0^{2\pi}\sin(lx)\sin(kx)\,dx$$

$$\overset{\text{part. Int}}{=} [\,\cdots\,] = 0 + 0 + b_k\pi \Bigg]$$

Die Formeln in (*) kitzeln die resp. Frequenzanteile aus p_n heraus. Die Kernidee ist es, dasselbe bei allgemeinen 2π-periodischen, int'baren Fkt (für diese ist (*) sinnvoll) zu versuchen; daher die folgende

(3) <u>DEF</u> (FR) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periodisch & R-intbar auf $[0,2\pi]$. Wir definieren

(i) die <u>Fourier-Koeffizienten</u> von f durch

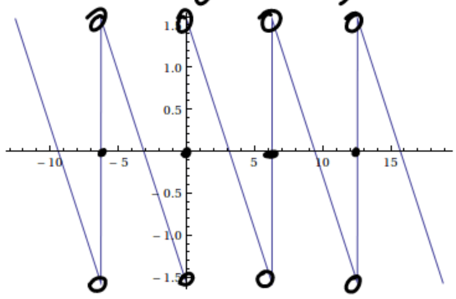
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

(ii) die <u>Fourier-Reihe</u> von f (unabhängig von Konvergenzfragen)

$$\mathcal{F}[f](x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\big)$$

(4) <u>BSP</u> (Sägezahn & Haifischzahn – ein Déjà-vu)

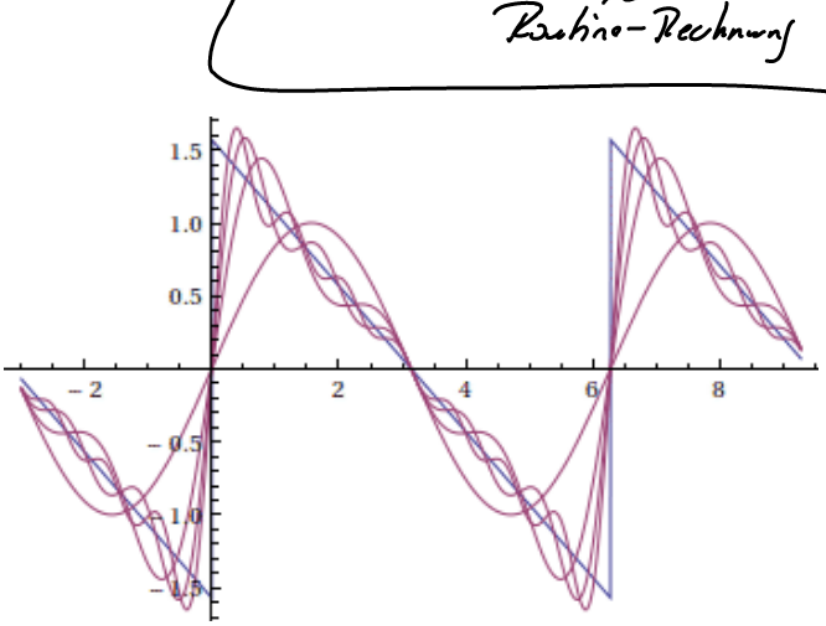
(i) Sei $s(x):=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2} & 0<x<2\pi\\ 0 & x=0\end{cases}$



periodisch fortgesetzt. Dann gilt

$$\mathcal{F}[s](x)=\underset{\text{Routine-Rechnung}}{[\dots]}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$$

$a_k=0\ \forall k$
$b_k=1/k$



Das ist genau die Reihe (S) aus §7; wissen

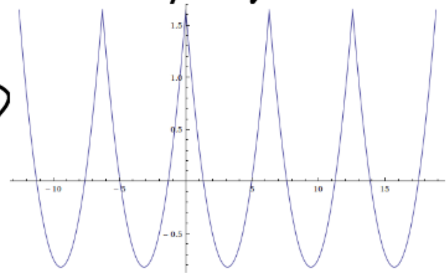
$$\mathcal{F}[s](x)\to s(x)$$

pktw $\forall x\in\mathbb{R}$ &
glm auf $[\delta,2\pi-\delta]$ $(\delta>0)$

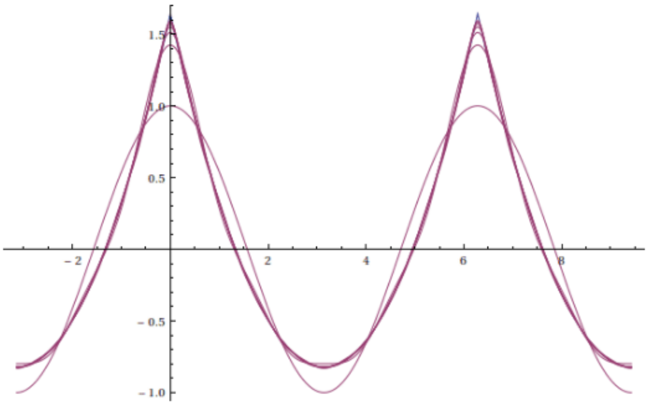
(ii) Sei $h(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$ $(x \in [0, 2\pi])$ periodisch fortgesetzt.

Dann gilt

$$\boxed{\mathcal{F}[h](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}}$$



Das ist genau die Reihe (H) aus §7 & und wir wissen $\mathcal{F}[h] \to h$ glm auf $[0, 2\pi]$.



(5) Konvergenzfragen. Die Bsp in (4) weisen darauf hin, dass weder glm noch pktw Konvergenz der „angemessene" Begriff für FR ist.

[Im Fall (S) ist die Konvergenz nicht glm & die pktw Konvergenz in allen x ist der Def von s – genauer $s(0)=0$ – geschuldet: Definiert man stattdessen $s(0) = a \neq 0$ so ändert sich die FR nicht – die Integrale „spüren" das garnicht & bleiben gleich – und die pktw Konvergenz ist zerstört!]

Es stellt sich heraus, dass der „richtige" Begriff die Konvergenz im quadratischen Mittel oder $\|\ \|_2$-Norm Konvergenz ist: [vgl. 1.13 (iii)]

$f_n \to f$ im quadr. Mittel

$$:\Longleftrightarrow \|f_n - f\|_2 \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^{2\pi} |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \to 0$$

Es gilt nämlich das fundamentale

Thm: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und intbar auf $[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$F[f] \to f \text{ im quadr. Mittel}$$

(6) Analysis trifft lineare Algebra: Fourier-Entwicklung als Basisdarstellung

Basisdarstellung im $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$: $v \in \mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$

Standardskalarprodukt

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v | e_i \rangle e_i$$

Koeffizienten

Standardbasis $e_i = (0, . 0, 1, 0, .., 0)$

$$\langle v | e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j (e_i)_j = v_i$$

Hier versuchen wir etwas Analoges. Dazu definieren wir ein Skalarprodukt auf $\mathcal{R}([0, 2\pi]; \mathbb{C})$

Vektorraum [?K] 1.15] der R-intb. Fkt auf $[0, 2\pi]$ mit Werten in $\mathbb{C}$

$$\langle f | g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

$\langle \, | \, \rangle$ hat (im Wesentlichen) alle Eigenschaften eines Skalarprodukts (siehe Lin Alg) und $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ sind bzgl $\langle \, | \, \rangle$ ein ORTHONORMALSYSTEM!

Genauer: definieren wir $e_k = \sin(kx)$, $f_k = \cos(kx)$ dann gilt

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{kl}$$

$$\langle e_k, f_l \rangle = 0 \quad \forall k,l$$

Mit $\langle\,|\,\rangle$ lassen sich FK & FR besonders schön anschreiben.

$$a_k = 2\langle f | f_k \rangle, \quad b_k = 2\langle f | e_k \rangle$$

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k f_k + b_k e_k \right)$$

$$= \langle f, f_0 \rangle + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle f, e_k \rangle e_k + \langle f, f_k \rangle f_k \right)$$

komplexe Schreibweise

$g_k := e^{ikx}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, g_k \rangle g_k$$

Reihe, d.h. Limes (Analysis)

Basisdarstellung (lin. Alg)

6 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel beginnen wir unsere Reise in die mehrdimensionale Analysis und beschäftigen uns mit der Differentialrechnung von Fkt

$$\left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \geq 1) \quad (*) \right.$$

Wie bei eindim Analysis beginnen wir mit dem Studium des Definitionsbereichs der Fkt und Konvergenzfragen darin (vgl. [1]), die wir in

§1 Topologie des $\mathbb{R}^n$

untersuchen. Danach beginnen wir unser Studium von Fkt (*) [vgl. [2] im 1d-Fall] in

§2 Fkt von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Grundbegriffe & Stetigkeit

Nachdem so die geeigneten Grundlagen gelegt sind beginnen wir die eigentliche mehrdim Differentialrechnung in

§3 Differenzierbare Fkt

wo wir uns vor allem mit dem Begriff der Diffbarkeit von Fkt mit mehrdim Definitionsbereich auseinandersetzen (müssen). Darauf aufbauend studieren wir die Eigenschaften diffbarer Fkt (*) in

§4 SÄTZE ÜBER DIFFBARE FKT

Hier werden nicht nur Analoga der 1-d Theorie behandelt – etwa Extremwerte [vgl $\boxed{3}$ §2] und Taylor-Entwicklungen [vgl $\boxed{5}$ §3] – sondern genuin mehrdimensionale Themen wie der über implizite Fkt.

Zum Abschluß des Kap. behandeln wir in

§5 KURVEN

Fkt mit 1-d Defbereich aber mehrdim Zielbereich, also „Kurven" im landläufigen Sinn. Um diese zu studieren benötigt man zwar keine mehrdim Differentialrechnung – der Defbereich ist ja $\mathbb{R}$ – sie bereiten aber den Boden für unseren Einstieg in die mehrdim. Integralrechnung.