§2 Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$: Grundbegriffe & Stetigkeit

2.1 Intro (Mehrdimensionale Analysis)

Aufbauend auf unserem Studiums der Topologie des mehrdim. Raumes $\mathbb{R}^n$ beginnen wir jetzt mit der eigentlichen mehrdimensionalen Analysis, d.h mit der Analysis von Fkt

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $m,n \geq 1$. Da solche Fkt in der Schulanalysis wenig bis garnicht vorkommen werden wir uns zunächst ausführlich mit dieser Begriffsbildung beschäftigen, die Verwendung solcher Fkt ausführlich motivieren und Spezialfälle, Bsp und Veranschaulichungen diskutieren. Schließlich werden wir die Stetigkeit solcher Fkt diskutieren und sowohl Bekanntes (wieder-)entdecken, als auch ganz neue Phänomene kennenlernen.

2.2 Motivation (Funkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – Was, wozu, warum?)

Bisher haben wir (mit wenigen Ausnahmen fast) nur Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ betrachtet, also Funktionen, die eine (reelle) Zahl fressen und eine andere (reelle) Zahl ausspucken. Betrachtet man mögliche Anwendungen so entdeckt man recht schnell, dass in vielen Situationen so eine einfache Fkt nicht ausreichend ist. Viel öfter möchte man Pkten in einem mehrdim Raum eine Zahl oder auch einen Vektor (≙ mehrere Zahlen) zuordnen. Beispiele gibt es wie Sand am Meer zB:

- Bahnen im Raum: jedem Zeitpkt $t \in [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ will man die Position eines Objekts im Raum $\mathbb{R}^3$ zuordnen, das ergibt eine Fkt

$$\begin{aligned} f: [t_0, t_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

die Position eines Gegenstands im Raum

- Temperaturfeld. Jedem Punkt p in Wien [das wir uns der Einfachheit halber flach, also als TM $W \subseteq \mathbb{R}^2$ vorstellen] ordnen wir die Temperatur $T(p)$ heute um 7^h morgens zu. So ergibt sich eine Fkt

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 \supseteq W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

die Temp im Pkt x heute um 7:00

- Windströmung: Wir wollen jedem Punkt p über Österreich bis zu einer Höhe von 8km die jeweilige Windgeschwindigkeit zuordnen.

Dabei soll die Windgeschwindigkeit ein 3-dim Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sein, wobei die Richtung von v die Windrichtung ergibt und die Länge $\|v\|$ von v die Windgeschwindigkeit in ms^{-1} angibt. So erhalten wir eine Abb

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^3 \supseteq O &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\longmapsto v(p) \end{aligned}$$

Windgeschw & -richtg im Pkt p

Nehmen wir noch die Zeit als Parameter hinzu, so haben gelangen wir zu einer Fkt

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^4 \supseteq [t_0, t_1] \times O &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, p) &\longmapsto v(t, p) \end{aligned}$$

Windgeschw & -richtg im Pkt p zur Zeit t

Um alle solche Bsp geeignet und in einem Rahmen beschreiben, modellieren & analysieren zu können betrachtet man also Fkt

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die einem Pkt oder Vektor [das ist nur eine Frage der Modellierung/Anschauung – aber keine mathematische Frage] im $\mathbb{R}^n$ einen Pkt/Vektor im $\mathbb{R}^m$ zuordnet.

Wir beginnen unser Studium solcher Fkt indem wir etwas Terminologie einführen & Spezialfälle betrachten & veranschaulichen.

2.3 TERMINOLOGIE. Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ eine Fkt.

(i) (Komponentenfkt.) Für $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Da $f(x) \in \mathbb{R}^m$, muß nämlich $f(x)$ ein Vektor mit m Komponenten sein, diese bezeichnen wir eben mit $(f_1(x), \dots, f_m(x))$. Dabei schreiben wir Vektoren manchmal als Zeilen- manchmal als Spaltenvektoren, ohne damit etwas Mathematisches ausdrücken zu wollen.

Diese „Zerlegung" von $f(x)$ in $(f_1(x), \dots, f_m(x))$ können wir natürlich für jedes $x \in U$ durchführen und so erhalten wir m-Stück Fkt f_j $(1 \leq j \leq m)$,

$$f_j : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

D.h. eine Fkt $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ besteht aus m-Stück sog. skalarwertigen Fkt $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$. Diese nennen wir die Komponentenfkt oder kurz Komponenten von f. Diese sind die „Bausteine" von f und – wie wir sehen werden – spiegeln sich wesentliche Eigenschaften von f schon in den Komponentenfkt f_j.

Eine Fkt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind in Wirklichkeit m Fkt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(ii) (Partielle Funktionen) Ähnlich – aber nicht mit (i) zu verwechseln! – können wir $x \in \mathbb{R}^n$ in seine Komponenten zerlegen, also $x = (x_1, \dots, x_n)$ schreiben. Damit ergibt sich

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die sog. partiellen Fkt von f betrachten indem wir alle bis auf eine Komponente von x festhalten und nur eine Komponente – als Var. – laufen lassen. Genauer sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ fix $(1 \le k \le n)$ dann ist die k-te partielle Fkt von f die Fkt

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(\underbrace{x_1, \dots, x_{k-1}}_{\text{fix}}, \underset{\text{läuft}}{x}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{\text{fix}}) \in \mathbb{R}$$

Anders als die Komponentenfkt spiegeln die partiellen Fkt oft nicht die wesentlichen Eigenschaften der Fkt wider!

Explizit als Vorsicht!

(iii) WARNUNG. Anders als (i) führt (ii) zu keiner „guten Zerlegung" von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Einerseits können die Komponentenfkt

$$f_1: U \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_1(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

$$\vdots$$

$$f_m: U \ni x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_m(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

für viele Zwecke separat betrachtet werden und kodieren dabei wesentliche Eigenschaften von f. Daher sind Fkt der Bauart

$$f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$$

1-d Zielbereich, „skalare Fkt"

die wesentlichen Bausteine der mehrdim. Analysis.

Ein wesentlicher Knackpunkt der mehrdim Analysis ist es, dass andererseits die Abhängigkeit von $x = (x_1, \dots, x_n)$ von Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – oder auch nur der Bausteine $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – nicht gut „aufgedröselt" werden kann in eine Abhängigkeit von x_1 und eine von x_2 usw. Mit anderen Worten kodieren die partiellen Fkt nicht gut die Eigenschaften der Gesamtfkt.

Zum Merken:

$$\{ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \}$$

kann aufgedröselt werden

kann nicht aufgedröselt werden & sorgt für „neue Effekte"

Das Wesentliche der mehrdim. Analysis steckt in $n > 1$, nicht in $m > 1$.

2.4. Spezialfälle & Veranschaulichung

Wir betrachten $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ $(m, n \geq 1)$

(i) Kurven. Falls $n=1$ spricht man von Kurven; Sie werden meist mit c oder α bezeichnet und sinnvollerweise auf Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ betrachtet, also

$$c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

Falls $m=1$, sind wir im [faden?] Fall der eindim. Analysis.

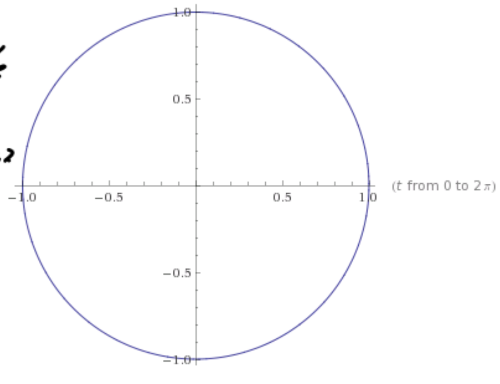
Falls $m=2$, so sprechen wir von ebenen Kurven oder Kurven in der Ebene. Diese können wir veranschaulichen, indem wir ihr Bild $c(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ zeichnen. Bsp sind etwa

Kreis

1. Komponente

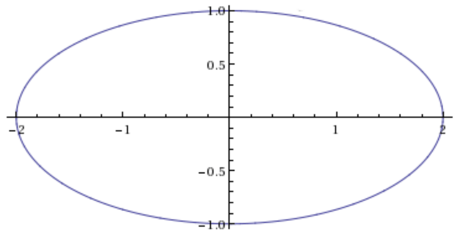
2. Komp

$$c: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



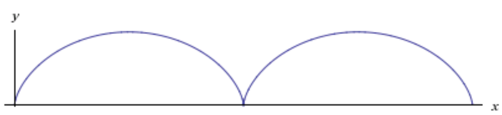
Ellipse

$$\alpha: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Zykloide

$$s: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

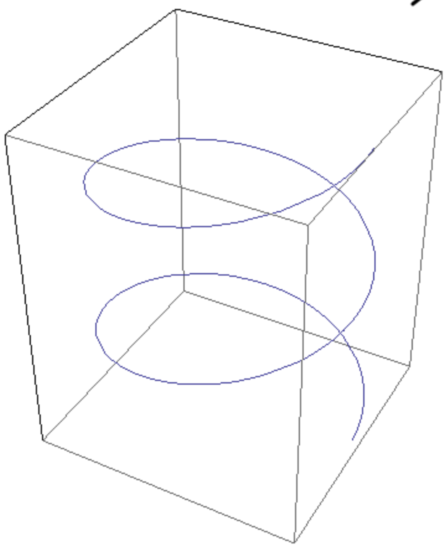


(plotted for t from 0 to 4π)

Keine Graphen von Fkt: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Falls $m=3$ spricht man von Raumkurven. Sie können ebenfalls durch ihr Bild veranschaulicht werden, z.B.

$$c : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$



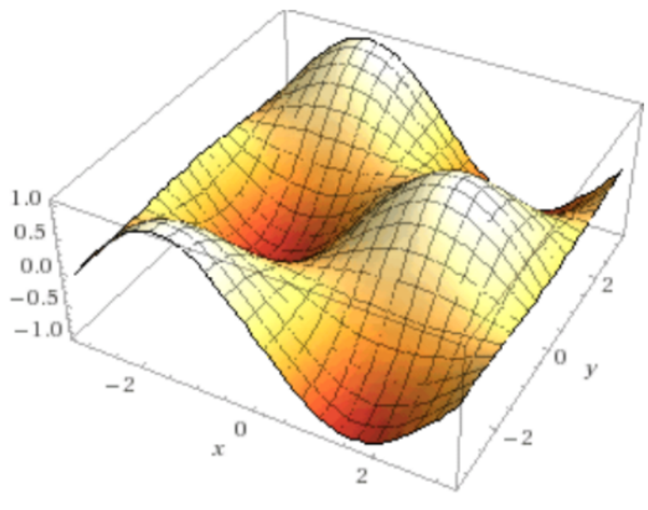
Helix, bzw. Schraubenlinie

(ii) „Landschaften": Falls $n=2$, $m=1$ also im Falle reellwertiger/skalarwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$$

kann der Graph $G(f) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in U\}$ als „Relief" oder Landschaft veranschaulicht werden: Über jedem „Punkt $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ wird der Funktionswert $f(x,y)$ eingezeichnet. Ein Bsp ist etwa $(U = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi))$

$$f : U \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$$



Da $n = 2 > 1$ können wir partielle Fkt von f betrachten

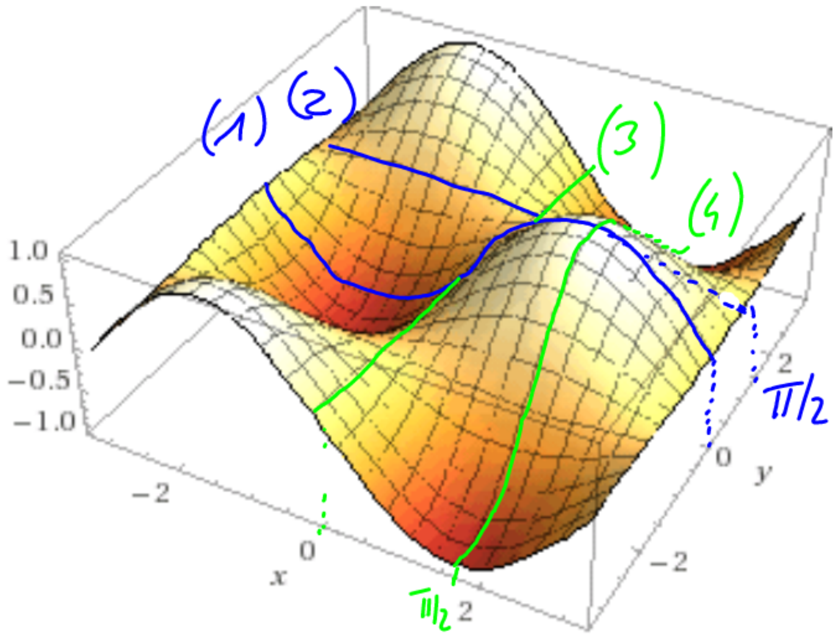
zB:

$$x \longmapsto f(x,0) = \sin(x)\cos(0) = \sin(x) \qquad (1)$$

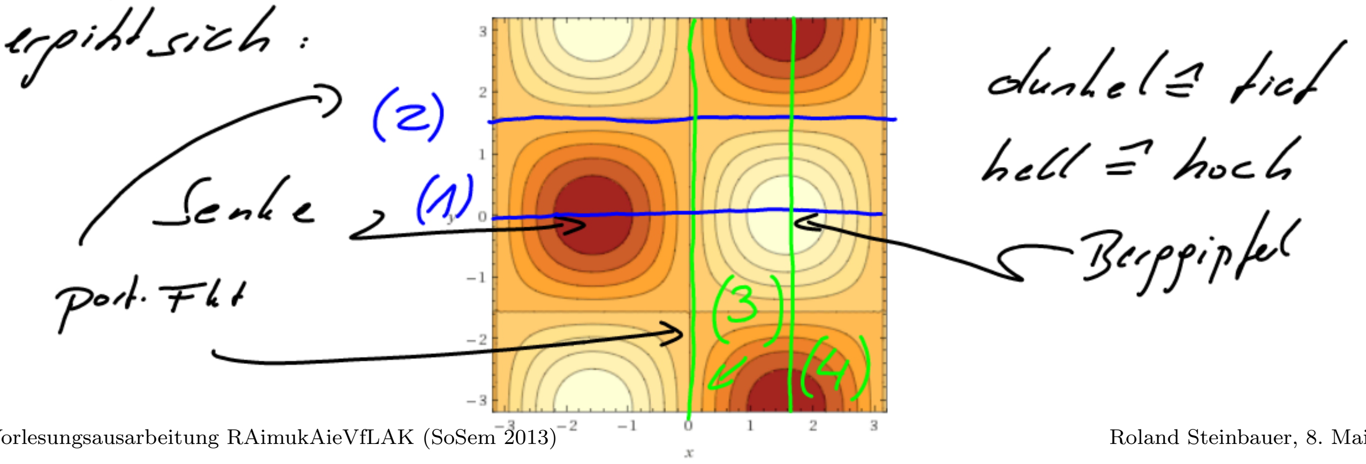
$$x \longmapsto f(x,\tfrac{\pi}{2}) = \sin(x)\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad (2)$$

$$y \longmapsto f(0,y) = \sin(0)\cos(y) = 0 \qquad (3)$$

$$y \longmapsto f(\tfrac{\pi}{2},y) = \sin(\tfrac{\pi}{2})\cos(y) = \cos(y) \qquad (4)$$



Eine 2. Möglichkeit eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$ zu veranschaulichen besteht darin, die Höhenschichtlinien in U einzuzeichnen – wie in eine Landkarte. Dabei werden in U alle Pkt $(x,y) \in U$ gleich eingefärbt, wo $f(x,y)$ denselben Wert annimmt. In unserem Bsp ergibt sich:



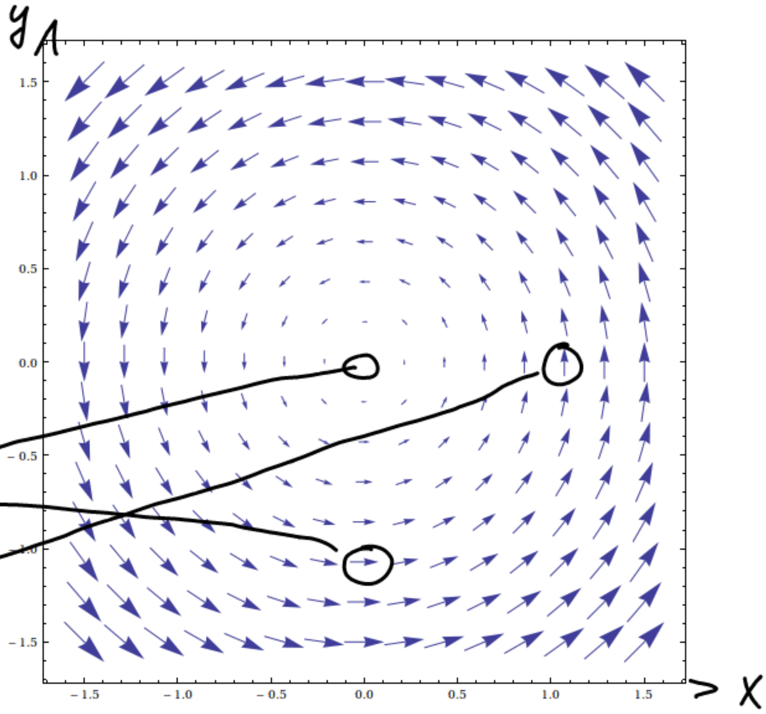
(iii) <u>Vektorfelder</u>. Im Fall $n=m$ spricht man von <u>Vektorfeldern</u>. Anschaulich gesprochen ordnet eine Fkt

$$v: \mathbb{R}^n \supseteq U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

jedem Pkt $x=(x_1,\dots,x_n) \in U$ den Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zu, den wir uns ab im Pkt x angeheftet denken (können).

Falls $m=n=2$ oder auch $m=n=3$ können wir v graphisch veranschaulichen; wir betrachten 2 Bsp.

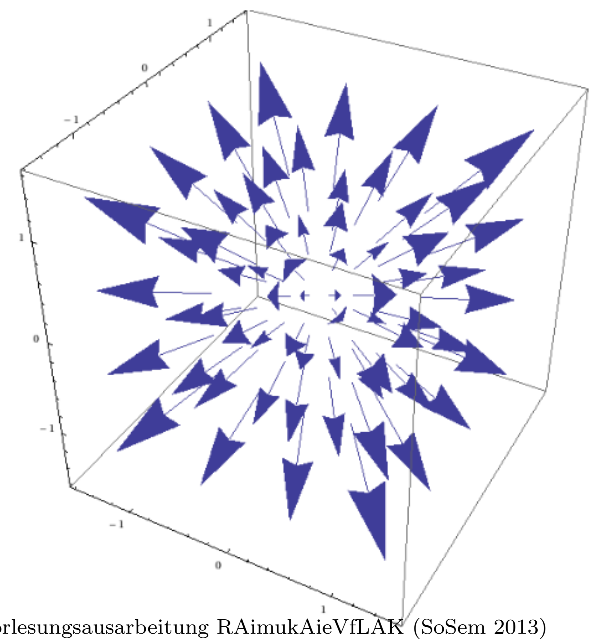
$$v: [-1,1]\times[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



<u>z.B.:</u> $v(0,-1) = (1,0)$

$v(0,0) = 0$

$v(1,0) = (0,1)$



$$v: [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$v(x,y,z) = (x,y,z)$$

Das Positionsfeld: In jedem Pkt wird ein Vektor angehängt, der vom Ursprung $(0,0,0)$ wegzeigt & dessen Länge seiner Entfernung zum Ursprung entspricht.