3.11 DEF (Differenzierbarkeit) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^m$.

(i) Die Fkt f heißt <u>differenzierbar im Pkt $\xi \in G$</u>, falls

$$\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}, \ \exists \delta > 0 \ \exists r: \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m \text{ sodass}$$

$$f(\xi + h) - f(\xi) = A \cdot h + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } \xi + h \in G$$

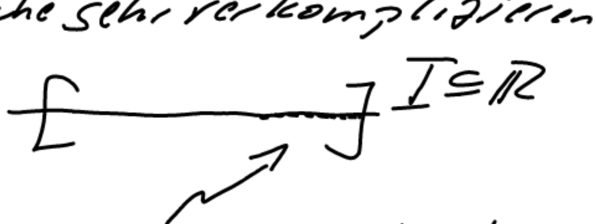
$$\text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

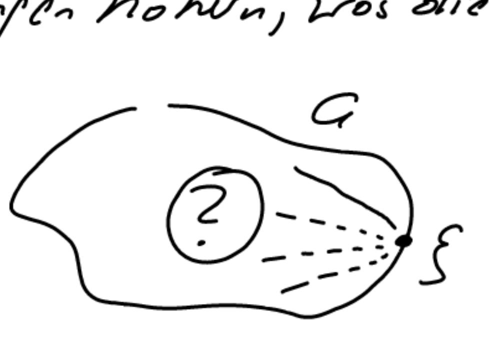
(ii) Ist f diffbar in allen Pkten $\xi \in G$, dann nennen wir f <u>diffbar (auf G)</u>.

<u>3.12 BEM</u> (zur Def der Diffbarkeit)

AUF FOLIE VORGETRAGEN

(i) (Offener Defbereich) Wir beschränken uns bei der mehrdim Diffbarkeit auf <u>offene</u> Definitionsbereiche. Anders als im 1-d Fall kann man sich dem Rand des Defbereichs aus vielen Richtungen nähern, was die Sache sehr verkomplizieren würde.





einseitige; hier linksseitige Abl leicht zu definieren $\boxed{3}$ 1.7(iii)

(ii) (Übereinstimmung im Fall $n=1=m$) Def 3.11 reduziert sich im Fall $n=1=m$ tatsächlich auf die Bedingung in $\boxed{3}$ 1.19 – vgl 3.9(iii). Dabei ist die lin. Abbildung A dargestellt durch die 1×1-Matrix $a = f'(\xi) \in \mathbb{R}$.

(iii) (Die Ableitung?) Pkt (ii) legt nahe, dass wir (auch) in 3.11 A als die Ableitung von f in ξ bezeichnen. Dies haben wir in 3.11 allerdings aus gutem Grund nicht getan: bevor wir das können, müssen wir sicherstellen, dass A eindeutig durch 3.11 bestimmt ist.

Außerdem würden wir A auch gerne berechnen (können) – bevor wir es großartig benennen.

Erfreulicherweise kommen uns bei beiden Problemen die partiellen Ableitungen zuhilfe!

3.13 SATZ+DEF (Diffbar $\Rightarrow$ part diffbar, Jacobi-Matrix)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Dann sind alle Komponentenfkt $f_j : G \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq m)$ (in alle Richtungen) partiell diffbar in ξ und es gilt

$$A = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\xi) & D_2 f_1(\xi) & \dots & D_n f_1(\xi) \\ D_1 f_2(\xi) & \dots & \dots & D_n f_2(\xi) \\ \vdots & & & \\ D_1 f_m(\xi) & \dots & \dots & D_n f_m(\xi) \end{pmatrix} =: Df(\xi).$$

d.h. $a_{ij} = D_j f_i(\xi)$ eine $(m \times n)$-Matrix $\widehat{=}$ Abb: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Die Matrix $Df(\xi)$ heißt Jacobi-Matrix von f in ξ.

3.14 BEM+TERMINOLOGIE (3.12(iii) gelöst, die Ableitung)

Eine Kurzfassung von 3.13 ist:

f diffbar in ξ $\Longrightarrow$ Alle Komponenten f_j part. diffbar in ξ und $A = Df(\xi)$

Insbesondere ist A durch die Jacobi-Matrix $Df(\xi)$ eindeutig bestimmt & (leicht) berechenbar und wird die Ableitung von f in ξ genannt.

Nichts Neues nur $(n\cdot m)$-mal soviel Arbeit

AUF FOLIE VORGETZ.

Beweis [nicht schwierig aber viel Bürokratie]

Seien (mit der Notation von 3.13)

Komponenten von r

$$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n),\quad h=(h_1,\dots,h_n),\quad r=(r_1,\dots,r_m)$$

Die Gleichung in 3.12, $f(\xi+h)-f(\xi)=Ah+r(h)$ lautet in Komponenten ($1\leq j\leq m$)

Matrixmult $A\cdot h$

$$(*)\qquad f_j(\xi+h)-f_j(\xi)=a_{j1}h_1+\dots+a_{jn}h_n+r_j(h).$$

Aus der Bedingung an r, $\frac{r(h)}{\|h\|}\to 0$ $(h\to 0)$ folgt $\forall\, 1\leq j\leq m$

$$(**)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{r_j(h)}{\|h\|}=0.$$

Idee: So kommt man zu part. Abl.

Speziell für $h=s\cdot e_i$ ($s\in\mathbb{R}$, e_i der i-te Einheitsvektor) nehmen $(*)$, $(**)$ folgende Form an:

$\sum_{l=1}^{n}a_{jl}(e_i)_l=\sum_l a_{jl}\delta_{il}=a_{ji}$

$$f_j(\xi+se_i)-f_j(\xi)=a_{ji}\,s+\rho_j(s)\quad\text{mit}$$

$$\rho_j(s):=r_j(se_i)\quad\text{und}\quad\lim_{s\to 0}\frac{\rho_j(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{r_j(se_i)}{\|se_i\|}=0.$$

$$\overset{[3]\,1.18}{\Longrightarrow}\ s\mapsto f_j(\xi+se_i)\ \text{diffbar im Pkt } \xi \text{ mit Abl. } a_{ji}$$

$$\overset{3.3}{\Longrightarrow}\ f_j\ \text{part diffbar in } \xi \text{ nach } x_i \text{ und } D_i f_j(\xi)=a_{ji}.$$

$\square$

offenes Intervall

3.15 BEM (Spezialfälle)

NICHT VORGETR.

(i) $n=1=m$. Also $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$. Dann gilt

$$Df(\xi) = f'(\xi),$$ eine (1×1) Matrix und wir sind zurück in Kap. 13

(ii) $n=1$, Kurven: Sei $c=(c_1,\dots,c_m): I \to \mathbb{R}$ diffbar in $t \in I$. Dann gilt

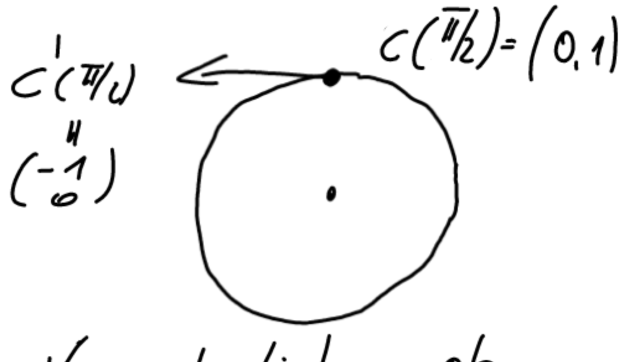
vgl. 2.4(ii)

$$Dc(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_m'(t) \end{pmatrix} := c'(t),$$ eine $(m\times 1)$-Matrix, also ein Spaltenvektor

z.B.

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$Df(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$



Veranschaulichung als „Geschwindigkeitsvektor"

(iii) $m=1$, skalare Fkt: Sei $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in G$, dann gilt

$$Df(\xi) = (D_1 f(\xi), \dots, D_n f(\xi)),$$ eine $(1\times n)$ Matrix, also ein Zeilenvektor

Setzen wir in die Def der Diffb. ein, so erhalten wir

$$f(\xi+h) - f(\xi) = D_1 f(\xi) h_1 + \dots + D_n f(\xi) h_n + r(h)$$

$$= \langle Df(\xi)^t, h \rangle + r(h).$$

Skalarprod. auf $\mathbb{R}^n$

$$Df(\xi)^t = \begin{pmatrix} D_1 f(\xi) \\ \vdots \\ D_n f(\xi) \end{pmatrix}$$

der transponierte Zeilenvektor ist ein Spaltenvektor

Oft wird folgende Terminologie verwendet:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\xi) := Df(\xi)^t}$$

heißt der <u>Gradient</u> von f im Pkt ξ. Damit schreibt sich die Def der Diffbarkeit für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – ohne den Bauteilen des allg Falls, vgl 2.3(i) – wie folgt

$$\boxed{f(\xi+h) - f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle + r(h)} \quad \text{mit } \frac{r(h)}{\|h\|} \to 0 \ (h \to 0)$$

<u>z.B.</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$,

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

AUSGELASSEN

<u>3.16 BEM</u> (Umformulierungen der Diffbarkeit) Folgende einfache Umformulierungen der Diffbarkeit sind oft nützlich: Für $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m): G \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in G$ sind folgende Aussagen äquivalent

$$Df(\xi) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \vdots & & \\ D_1 f_m & \dots & D_n f_m \end{pmatrix}(\xi) \overset{3.15(iii)}{=} \begin{pmatrix} Df_1 \\ \vdots \\ Df_m \end{pmatrix}$$

(1) f diffbar in ξ

(2) Alle Komponenten $f_j: G \to \mathbb{R}$ sind diffbar in ξ

(3) $\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, sodass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - Ah}{\|h\|} = 0$$

$r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - Ah$
vgl. Bew [3] 1.19

3.17 BSP (Differenzieren, Jacobi-Matrix)

(i) (lin. Abb) Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linear, also $f(x)=Bx$ mit B eine $(m\times n)$-Matrix. Dann gilt $\forall\xi\ \forall h$

$$f(\xi+h)-f(\xi)=B(\xi+h)-B\xi=Bh+0.$$

Also ist Def 3.11 mit $r(h)=0$ erfüllt und es gilt $A=B$, d.h. $Df(\xi)=B\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n$.

[Die Ableitung eine lin. Abb ist (in jedem Pkt) die Matrix selbst; das ist schon auf $\mathbb{R}$ so: $f(x)=ax$ $f'(x)=a\ \forall x$]

(ii) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^2+xyz\\2x+z\end{pmatrix}$. Dann hat die Jacobi-Matrix die Gestalt

$$Df(x,y,z)=\begin{pmatrix}D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1\\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_3\end{pmatrix}(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x+yz & xz & xy\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3.18 WARNUNG (part diffbar $\not\Rightarrow$ diffbar; ja nicht einmal stetig)

(i) In 3.17(ii) haben wir zwar die Jacobi-Matrix berechnet, damit ist aber nicht gezeigt, dass f auch diffbar ist?! Tatsächlich gilt

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ diffbar in } \xi \;\overset{3.13}{\Longrightarrow}\; \\ \phantom{f \text{ diffbar in } \xi}\;\not\Longleftarrow \end{array}\right. \begin{array}{l}\text{Alle Komponenten } f_j\\ \text{part diffbar in alle Richtungen}\\ \text{in } \xi\end{array} \quad (*)$$

(ii) Es kommt sogar noch dicker: Die Bedingung auf der rechten Seite impliziert nicht einmal die Stetigkeit, genauer sei $f: G\to\mathbb{R}$, $\xi\in G$ dann gilt

$$\left\{ f \text{ stetig in } \xi \quad \not\Leftarrow \quad f \text{ part diffbar in } \xi \right\}$$

Ein explizites Gegenbsp ist das Peano-Bsp aus 2.13:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

UE

Dann gilt [2.13] für die part. Fkt

$$x \mapsto f(x,0) = 0 \ \forall x \Rightarrow D_1 f(0,0) = 0$$
$$y \mapsto f(0,y) = 0 \ \forall y \Rightarrow D_2 f(0,0) = 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ part diffbar aber unstetig – und daher auch nicht diffbar wie aus Satz 3.19 (unten: diffbar $\Rightarrow$ stetig) folgt.

(iii) Alles wird wieder gut, wenn die part. Ableitungen nicht nur existieren, sondern auch stetig sind. Das zeigen wir in Satz 3.20 unten.

AUSGELASSEN

(iv) Zunächst halten wir aber fest, dass – wie auf $\mathbb{R}$ – die Diffbarkeit die Stetigkeit impliziert und weil dieselben Gegenbsp wie auf $\mathbb{R}$ gültig bleiben für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$, $\xi \in G$ gilt

$$\left\{ f \text{ diffbar in } \xi \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ f \text{ stetig in } \xi. \right\}$$

$f(x) = |x|$ in $x = 0$ [[3], 3.8(vi)]

3.19 SATZ (diffbar $\Rightarrow$ stetig) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Dann ist f auch stetig in ξ.

<u>Beweis</u>: [selbe Idee wie [3] 1.13 nur mit Folgen statt lim v. Fkt]

Sei $(x^{(k)})$ Folge in G mit $x^{(k)} \to \xi$; setze $h^{(k)} := x^{(k)} - \xi$

$\Longrightarrow h^{(k)} \to 0$ und es gilt

$$f(x^{(k)}) - f(\xi) = f(\xi + h^{(k)}) - f(\xi)$$

$$\overset{3.13}{=} Df(\xi)h^{(k)} + r(h^{(k)}) \xrightarrow{(k\to\infty)} Df(\xi)\cdot 0 + 0$$

Also $f(x^{(k)}) \to f(\xi) \overset{2.7}{\Longrightarrow} f$ stetig in ξ. □

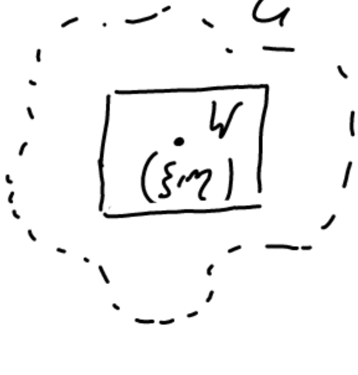
<u>3.10 SATZ</u> (stetig part diffb $\Rightarrow$ diffbar) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und seien alle partiellen Ableitungen $D_i f: G \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le n)$ stetig in ξ. Dann ist f diffbar in ξ.

<u>Beweis</u> [Anwenden des MWS & etwas Bürokratie]

AUSGELASSEN

(1) <u>Vorgeplänkel</u>:

Wir setzen $n=2$; der allgemeine Fall erfordert dann nur eine Anpassung der Notation.



Sei also $(\xi,\eta) \in G$ und ε so klein, dass

$W := [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \times [\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon] \subseteq G$

(2) <u>Berechnen des Inkrements</u>:

Für (α,β) mit $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$ gilt $(\xi,\eta)+(\alpha,\beta) \in W$

und wir können rechnen

$$f((\xi,\eta)+(\alpha,\beta)) - f(\xi,\eta)$$

Trick: geeigneten Term einschieben

$$= f(\xi+\alpha,\eta+\beta) - f(\xi,\eta+\beta) + f(\xi,\eta+\beta) - f(\xi,\eta)$$

$$= \alpha D_1 f(x_1,\eta+\beta) + \beta D_2 f(\xi,y_1)$$

(1d)-MWS für passende Zwischenstellen $x_1 \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$, $y_1 \in [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|]$

Trick

$$= \alpha D_1 f(\xi,\eta) + \beta D_2 f(\xi,\eta)$$

hätten wir gerne

stört Rest

$$\underbrace{+\alpha\underbrace{\big(D_1 f(x_1,\eta+\beta) - D_1 f(\xi,\eta)\big)}_{=: r_1(\alpha,\beta)\ (*)} + \beta\underbrace{\big(D_2 f(\xi,y_1) - D_2 f(\xi,\eta)\big)}_{=: r_2(\alpha,\beta)\ (*,*)}}_{=: r(\alpha,\beta)}$$

Matrixprodukt

$$= \underline{\big(D_1 f(\xi,\eta), D_2 f(\xi,\eta)\big) \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + r(\alpha,\beta)}$$

(3) Nachweis der Differenzierbarkeit: Gemäß 3.13 genügt es zu zeigen, dass für $h=(\alpha,\beta)$ $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ $(h \to 0)$.

Daher schätzen wir ab

$$\frac{|r(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \frac{|\alpha|\,|r_1(\alpha,\beta)| + |\beta|\,|r_2(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad \left[\ \}^{\circledast} = \left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix} \right\rangle \right]$$

$$\overset{\text{CS-Ugl}^{\circledast}}{\leq} \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sqrt{r_1^2(\alpha,\beta) + r_2^2(\alpha,\beta)}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \underline{\sqrt{r_1^2(\alpha,\beta) + r_2^2(\alpha,\beta)}} \qquad (\Delta)$$

Nun gilt: mit $(\alpha,\beta)\to(0,0)$ folgt

$$x_1\to\xi,\ y_1\to\eta,\ \eta+\beta\to\eta$$

D_1f, D_2f stetig in (ξ,η)

$$\Longrightarrow\ D_1f(x_1,\eta+\beta)\to D_1f(\xi,\eta)$$

Z.7.

$$D_2f(\xi,y_1)\to D_2f(\xi,\eta)$$

$$\overset{(*),(**)}{\Longrightarrow}\ r_1(\alpha,\beta)\to 0,\ r_2(\alpha,\beta)\to 0 \quad \text{für } (\alpha,\beta)\to(0,0)$$

$$\overset{(\Delta)}{\Longrightarrow}\ \frac{r(\alpha,\beta)}{\|\binom{\alpha}{\beta}\|}\to 0 \quad (\alpha,\beta)\to(0,0)$$

$\square$

3.21 BEM (Terminologie – Zusammenfassung der Situation)

(i) ($\mathcal{C}^1$-Flkt)

Gelten die Bedingungen von Satz 3.20 in allen Pkten $\xi\in G$, d.h. falls für $f:\mathbb{R}^n\supseteq G\to\mathbb{R}$ alle part. Ableitungen auf ganz G stetig sind, dann ist auch die Abb

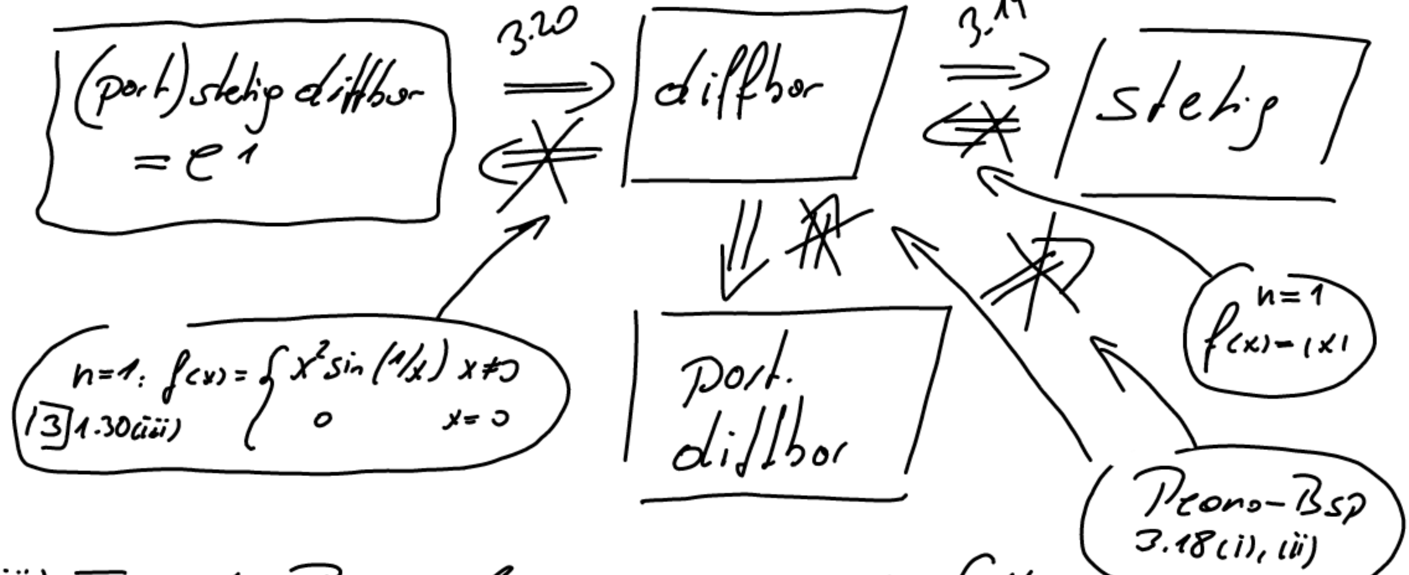
$$\underbrace{G\ni\xi\longmapsto Df(\xi)\in M_{(1\times n)}(\mathbb{R})}$$

$(1\times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen

stetig [wegen Z.8]. In völliger Analogie zum 1-d Fall [1] 1.30(ii)] nennen wir solche Fkt **stetig diffbar bzw $\mathcal{C}^1$-Fkt.**

Also sind stetig diffbare Fkt per def partiell stetig diffbare Fkt.

(ii) (Überblick) Wir können nun folgenden Überblick über die (Nicht-) Implikationen der Diffbarkeitsbegriffe geben:



(iii) Für die Praxis lernen wir aus (ii): Soll eine Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ auf Diffbarkeit untersucht werden, so ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

(1) Berechne die Jacobi-Matrix; natürlich nur falls möglich, d.h. alle Komp. alle part. Ableitungen besitzen

(2) Überprüfe die Einträge der Jacobi-Matrix auf Stetigkeit. Falls ja, dann ist f sogar $\mathcal{C}^1$; Falls nein, muß die Def der Diffbarkeit herangezogen werden ...

[Höchste Zeit für ...]

3.22 BSP (Differenzierbare Fkt)

(i) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+xyz \\ 2x+z \end{pmatrix}$, $Df(x,y,z) \overset{3.17(iii)}{=} \begin{pmatrix} 2x+yz & xz & xy \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist stetig auf $\mathbb{R}^3$ also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$, insbes diffbar

[(ii) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
ist stetig also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, insbes. diffbar auf $\mathbb{R}^2$]

(iii) $f: G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+\sqrt{y} \\ \sqrt{x}+y \end{pmatrix}$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2\sqrt{y} \\ 1/2\sqrt{x} & 1 \end{pmatrix}$ ist stetig auf $G \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(G;\mathbb{R}^2)$

insbes diffbar auf G

3.23 BEM (Baukasten)

Analog zum 1-d Fall wollen wir die Verträglichkeit der Differentiation mit den Grundoperationen untersuchen [vgl [3] 1.13] und daraus ein „Baukastensystem" fürs mehrdim Differenzieren plus Differentiationsregeln gewinnen — natürlich sind hier Einschränkungen gegeben, da z.B. Produkte nur für Fkt mit Zielbereich $\subseteq \mathbb{R}$ möglich sind...

3.24 PROP (Differentiationsregeln) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(i) (Linearkombinationen) Seien $f,g: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$. Für $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ diffbar in ξ und es gilt

$$\boxed{D(\lambda f+\mu g)(\xi) = \lambda Df(\xi) + \mu Dg(\xi)}$$

Zahl · Matrix

Matrix + Matrix

(ii) (Produktregel) Seien $f,g: G \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in G$. [?]
Dann ist fg diffbar in ξ und es gilt

Zahl · Vektor

$$\boxed{\operatorname{grad}(fg)(\xi) = f(\xi)\operatorname{grad} g(\xi) + g(\xi)\operatorname{grad} f(\xi)}$$

Vektor + Vektor

(iii) (Kettenregel) Seien $f: G \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \supseteq W \to \mathbb{R}^\ell$ Funktionen, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f(G) \subseteq W$. Ist f diffbar in $\xi \in G$ und g diffbar in $\eta := f(\xi) \in W$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: G \to \mathbb{R}^\ell$ diffbar in ξ und es gilt

Das übliche Vorgeplänkel: $\mathbb{R}^n \supseteq G \xrightarrow{f} f(G) \subseteq W \xrightarrow{g} \mathbb{R}^\ell$

$$\boxed{D(g \circ f)(\xi) = Dg(f(\xi)) \cdot Df(\xi)}$$

Jacobi-Matrix einer Abb $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$: $(\ell \times n)$-Matrix)

Produkt der Jacobi-Matrizen: $Dg(\eta) \in M(\ell, m)$, $Df(\xi) \in M(m,n)$ gibt eine Matrix in $M(\ell, n)$ oho okay

3.25 BSP (Kettenregel)

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ xy \end{pmatrix}$; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+2y \\ y \end{pmatrix}$

$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (0,1)$, $f(0,1) = (-1,0) = (\eta_1, \eta_2) = \eta$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}, \quad Df(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Dg(f(0,1)) = Dg(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hängt garnicht vom Pkt ab

$$\underline{D(g\circ f)(0,1)} \overset{3.24(iii)}{=} Dg(-1,0)\cdot Df(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Natürlich können wir auch direkt rechnen:

$$g\circ f(x,y) = g(x-y, xy) = \begin{pmatrix} x-y+xy \\ 3(x-y)+2xy \\ xy \end{pmatrix}$$

$$D(g\circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y, & -1+x \\ 3+2y & -3+2x \\ y & x \end{pmatrix}, \quad D(g\circ f)(0,1) = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ÜE

(ii) Ein wichtiger Spezialfall der Kettenregel ist $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Dann ist $g\circ f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und es gilt

$$\underline{(g\circ f)'(\xi)} = Dg(f(\xi))\cdot Df(\xi) =$$

(n×1)-Matrix = Spaltenvektor

$$= (D_1 g \ \cdots \ D_n g)(f(\xi))\cdot\begin{pmatrix} f_1'(\xi) \\ \vdots \\ f_n'(\xi) \end{pmatrix}$$

(1×n) Matrix = Zeilenvektor

$$= \underline{\langle \operatorname{grad} g(f(\xi)), f'(\xi)\rangle}$$

Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Beweis von 3.24

(i) [Einfaches Zusammensetzen der Defs] Für $\|h\|$ klein gilt

$$\left.\begin{aligned} f(\xi+h)-f(\xi) &= Df(\xi)h + r_1(h), \quad r_1(h)/h\to 0 \\ g(\xi+h)-g(\xi) &= Dg(\xi)h + r_2(h), \quad r_2(h)/h\to 0 \end{aligned}\right\}(*)$$

AUSGELASSEN

$$\Longrightarrow (\lambda f+\mu g)(\xi+h)-(\lambda f+\mu g)(\xi) =$$

$$= \lambda f(\xi+h)-\lambda f(\xi)+\mu g(\xi+h)-\mu g(\xi)$$

$$\overset{(*)}{=} \lambda Df(\xi)+\mu Dg(\xi)+\underbrace{\lambda r_1(h)+\mu r_2(h)}_{=r(h)}$$

Wieder wegen (*) gilt

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \lambda\frac{r_1(h)}{\|h\|}+\mu\frac{r_2(h)}{\|h\|} \longrightarrow 0\,.$$

(ii) Analog zu (i) [Heuser II 165.3]

(iii) Einfaches Umschreiben des 1-d Beweises [3] 1.23. $\square$

3.26 MOTIVATION (Richtungsableitung)

Wir stellen uns jetzt folgende Aufgabe: Wir wollen durch ein hügeliges Gelände eine Straße bauen. Dazu müssen wir ausgehend von einem Punkt die Steigung in verschiedene Richtungen bestimmen, um zu sehen was ein günstiger Trassenverlauf wäre.

Das zugrundeliegende math. Problem ist also die Ableitung einer Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ in eine bestimmte Richtung zu bestimmen. Dabei ist die Richtung durch einen Vektor v mit $\|v\|=1$ gegeben – einen sogenannten Richtungsvektor.

Eine naheliegende Definition – gleich für $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

3.27 DEF (Richtungsableitung) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$ $f: G \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$

Falls der Grenzwert

$$D_v f(\xi) := \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}$$

existiert und endlich ist, so nennen wir $D_v f(\xi)$ die Richtungsableitung von f in ξ in Richtung v.

3.28 BEOBACHTUNG (Richtungsabl. vs part. Ableitung)

Setzen wir in 3.27 $v = e_i$, dann sehen wir

$$D_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + te_i) - f(\xi)}{t} = D_i f(\xi)$$

also ist die Richtungsableitung in Richtung der i-ten Koordinatenachse gerade die i-te part. Ableitung. Die part. Ableitungen sind also spezielle Richtungsableitungen.

Andererseits lassen sich Richtungsableitungen in allg. Richtungen aus den part. Ableitungen zusammensetzen, wie die folgende Proposition zeigt.

3.29 PROP (Richtungsabl. via part. Abl.) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$ $f: G \to \mathbb{R}$ diff'bar in ξ. Dann existiert $D_v f(\xi)$ für jeden Richtungsvektor v und es gilt

$$D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$$

Beweis: [Einfache Rechnung] Für alle $0 \neq t$ klein genug gilt

$$\frac{f(\xi+tv)-f(\xi)}{t} \overset{3.13}{=} \frac{Df(\xi)\cdot tv + r(tv)}{t} = Df(\xi)\cdot v + \frac{r(tv)}{t}$$

$$\Longrightarrow Df(\xi)\cdot v = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$$ □

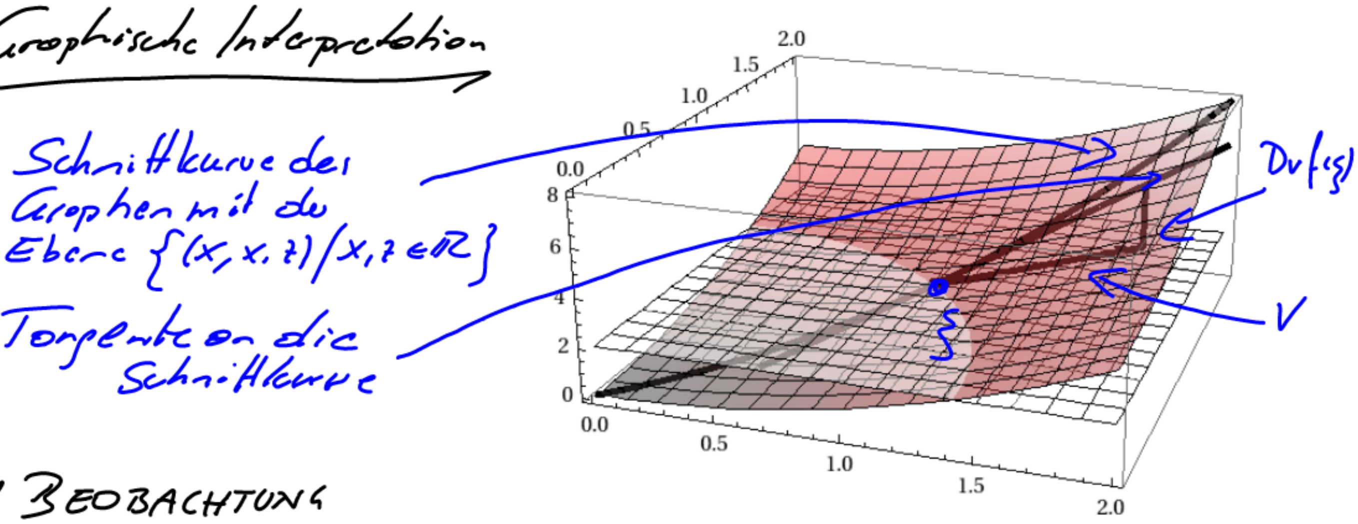
3.30 BSP (Richtungsableitung)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, $\xi = (1,1)$, $v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Dann gilt $D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Graphische Interpretation



3.31 BEOBACHTUNG

(Richtung des stärksten Anstiegs)

In der Formel aus 3.29 ist eine wichtige Information versteckt, die wir jetzt herauskitzeln wollen. Es gilt

$$|D_v f(\xi)| = |\langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \|\operatorname{grad} f(\xi)\| \, \|v\| \overset{\|v\|=1}{=} \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$$

D.h. die Norm des Gradienten beschränkt den Betrag aller Richtungsableitungen.

Ist außerdem $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$ dann ist $v_0 := \dfrac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$ ein Richtungsvektor und wir haben

$$D_{v_0} f(\xi) \overset{3.29}{=} \frac{\langle \operatorname{grad} f(\xi), \operatorname{grad} f(\xi) \rangle}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|} = \|\operatorname{grad} f(\xi)\| .$$

Das bedeutet, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(\xi)$ die Richtung des größten Anstiegs angibt. Genauer zeigt $\operatorname{grad} f(\xi)$ in Richtung des größten Anstiegs und $-\operatorname{grad} f(\xi)$ in Richtung des stärksten Gefälles.

Diese überaus wichtigen Ergebnisse halten wir in einem Satz fest

3.32 SATZ (Bedeutung des Gradienten) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ. Dann gilt

(i) Ist $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$, dann verschwinden alle Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ von f in ξ.

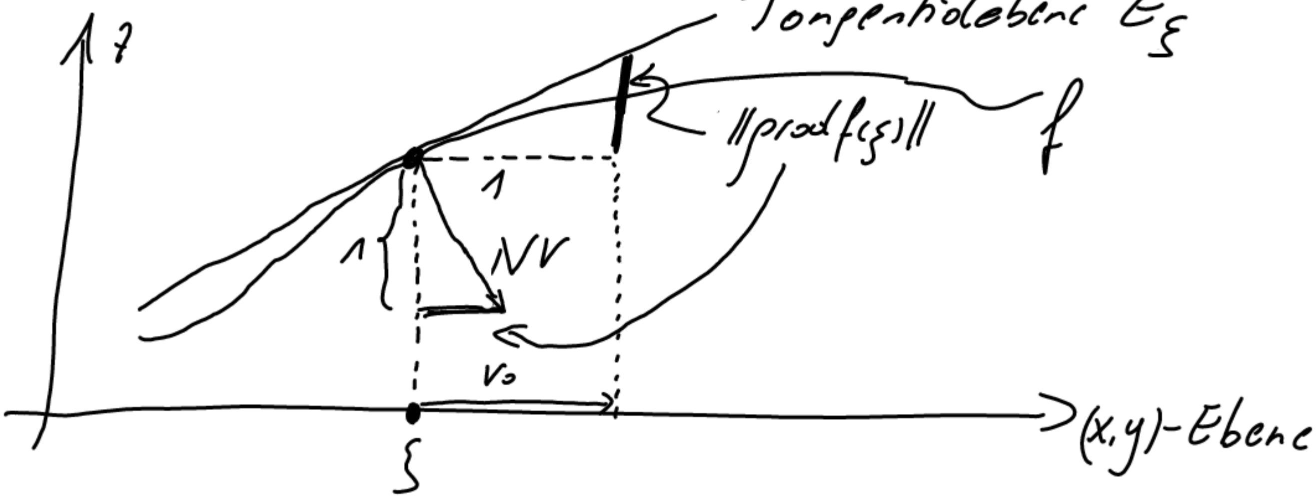
(ii) Ist $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$, so gibt es unter allen Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ eine größte, nämlich die Richtungsableitung in Richtung des Gradienten $\operatorname{grad} f(\xi)$ [d.h. $v = \operatorname{grad} f(\xi) / \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$]. Ihr Wert ist gerade $\|\operatorname{grad} f(\xi)\|$.

3.33 VERANSCHAULICHUNG & ANWENDUNG: TANGENTIALEBENE

WEGGELASSEN

Sei $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ diffbar, $\xi \in G$.

(i) Wir betrachten den vertikalen Schnitt durch den Graphen $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der senkrechten Ebene über der Geraden $t \mapsto \xi + t v_0$ mit $v_0 = \operatorname{grad} f(\xi) / \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$.
[Schneide geeignet durch die Grafik in 3.30]



(ii) Wir können nun leicht die Tangentialebene an $\Gamma(f)$ in $(\xi, f(\xi))$ beschreiben. Ein Normalvektor ist gegeben durch

$$NV = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{siehe Skizze}$$

Daher ergibt sich für die Hessesche Normalform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\xi \iff \left\langle NV, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - \xi_1 \\ y - \xi_2 \\ z - f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle \operatorname{grad} f(\xi), \begin{pmatrix} x - \xi_1 \\ y - \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle - (z - f(\xi)) = 0$$

Also $\boxed{z = f(\xi) + \left\langle \operatorname{grad} f(\xi), \begin{pmatrix} x - \xi_1 \\ y - \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0}$