§4 EIGENSCHAFTEN DIFFBARER FKT

4.1 INTRO. Nachdem im vorigen § der Differentiarbarkeitsbegriff für Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ genau beleuchtet wurde werden wir in diesem § [analog zu 1B] §2] Anwendungen der mehrdim Differentialrechnung behandeln. Genauer werden wir die folgenden 5 Themen studieren

(1) Mittelwertsätze. In 1-d hat sich der Mittelwertsatz als entscheidendes Werkzeug herauskristallisiert, das hinter vielen Resultaten steckt – bis hinauf zu Bew. 3.8, 3.20. Hier werden wir Verallgemeinerungen bzw. Abschwächungen des MWS kennenlernen

(2) Taylorentwicklung. In 1B] §3 haben wir den Satz v. Taylor kennengelernt, der es ermöglicht Fkt aus ihren Ableitungen in einem Pkt zu rekonstruieren – Er bleibt im Wesentlichen für $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ gültig

(3) Satz über implizite Fkt: Eine Fkt $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ lässt sich als „Landschaft" interpretieren. Hier gehen wir der höchst relevanten Frage nach, wann sich die Höhenschichtlinien als als Fkt einer Variable schreiben lassen bzw. welche Eigenschaften diese Fkt haben.

(4) Ableitung der inversen Fkt. Ebenfalls ein Thema das wir in 1-d betrachtet, geklärt & vielfach angewendet haben. Hier lernen wir die Verallgemeinerung kennen

(5) Extremwerte. Wir studieren die Extreme von Fkt $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Differentialrechnung. Die Situation ist hier viel reichhaltiger als in 1-d und die Sätze (verwenden einiges an lin. Algebra und) sind etwas schwächer als in 1-d.

Da wir hier das Ende unserer Reise in die Grundlagen der Differentialrechnung erreichen und auf diese Resultate im Rahmen der VO nicht weiter aufbauen werden wir die techn. Details stärker in den Hintergrund treten lassen und mehr auf die Ideen & Begriffe fokussieren — insbesondere werden wir uns oft mit dem Fall $n=2$ begnügen, da er oft schon alle relevanten Aspekte beinhaltet.

4.2 MITTELWERTSÄTZE

(i) Wie schon in 4.1(1) gesagt, ist im 1-d Fall der MWS das Werkzeug hinter vielen Resultaten (vgl. [B] 2.14, 2.17, 2.30, ...). Daher kann die Bedeutung eines analogen Satzes in der mehrdim Analysis garnicht überschätzt werden.

(ii) Für Fkt $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ bleibt der Satz im wesentlichen — mit den entsprechenden Anpassungen — erhalten; genauer

THM (Mittelwertsatz) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar auf G und seien $\xi, \xi+h \in G$ sodass auch ihre gesamte Verbindungsstrecke S in G liegt.
Dann $\exists\, \theta \in (0,1)$ sodass

THETA

$$f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi+\theta h)\cdot h$$

$\xi+\theta h$ liegt zwischen $\xi, \xi+h$

Beweis. [Anwendung des 1-d MWS & der Kettenregel]

Wir setzen $\varphi(t) := f(\xi+th)$, $t \in [0,1]$. $\varphi \mathrel{\hat=} f$ längs S

$\overset{3.24(iii)}{\Longrightarrow}$ φ diffbar auf $[0,1]$ und $\varphi'(t) = Df(\xi+th)\cdot h$

$\overset{[3]2.8}{\underset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, \theta \in (0,1)$ mit $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ also

$$f(\xi+h) - \varphi(\xi) = Df(\xi+\theta h)\cdot h$$

$\square$

(iii) Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\underline{m>1}$) ist der Satz allerdings falsch, da die Zwischenstellen für die verschiedenen Komponenten (für diese gilt je das Thm in (ii)) durchaus verschieden sein könnten. Ein explizites Gegenbsp ist $c: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

<u>Kein</u> MWS für $m>1$ sogar wenn $n=1$

ÜE

Es gilt $[\xi = 0, h = 2\pi]$

$c(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c(2\pi)$ aber $\nexists\, \theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c(2\pi) - c(0) = Dc(\theta 2\pi)\, 2\pi \overset{(N1)}{\neq}$$

denn $Dc(t) = c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|c'(t)\| = 1 \Rightarrow c'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iv) Punkt (iii) weist aber schon in Richtung einer „Ersatz-Lösung". Wenn schon keine gemeinsame Zwischenstelle für alle Komponenten existiert, so kann man doch zumindest eine Abschätzung erreichen wenn man Schranken an alle $D_i f_j$ auf der Verbindungsgeraden von ξ nach $\xi+h$ zur Verfügung hat. Tatsächlich gilt

SATZ (MWS für vektorwertige Fkt) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar auf G und seien $\xi, \xi+h \in G$ sodass ihre Verbindungsstrecke S in G liegt. Dann $\exists M > 0$ sodass

$$\|f(\xi+h) - f(\xi)\| \leq M \|h\|$$

d.h. f ist Lipschitz stetig vgl. [3] 2.14 (i)

[Dabei ist $M = \max\{|D_i f_j(x)| : x \in S, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
$\exists$ wegen [2] 2.11].

Beweis 7.3 Heuser II, 167.4 □

(v) Schließlich halten wir folgende wichtige Konsequenz von (iv) fest

KOROLLAR: (Ableitung $= 0 \Rightarrow$ Fkt konst.) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $G = B_r(x_0)$ und $f: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar mit $Df(x) = 0$ $\forall x \in G$. Dann ist f konstant auf G. [vgl. [3] 2.14 (ii)]

ACHTUNG Korrektur gegenüber VO.

[$B_r(\xi) = \{x : \|x - \xi\| < r\}$ ist konvex [3] 2.22 (i) und somit liegen für je 2 Pkte die Verbindungsstrecken in $B_r(\xi)$. □]

4.3 Der Satz von Taylor

kann ähnlich dem MWS entlang von Strecken für $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ aus dem 1d-Satz [S] 3.8 gefolgert werden. Sogar eine „komponentenweise Ausdehnung" auf $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ $(m>1)$ ist möglich; siehe [Heuser 2, 168]. Wir betrachten hier nur den 2-d Spezialfall $(n=2, m=1)$.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in G$, $h=(h_1,h_2)$ so dass die Strecke $S=\{\xi+th : 0\le t\le 1\}$ ganz in G liegt.
Sei $f: G\to\mathbb{R}$ eine C^3-Flt.

Wir betrachten f „über der Strecke S", d.h. $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$\varphi(t)=f(\xi+th)=f(\xi_1+th_1,\xi_2+th_2)$$

Taylor 1D [S] 3.8

$$\Longrightarrow \underbrace{\varphi(1)}_{f(\xi+th)} = \underbrace{\varphi(0)}_{f(\xi)} + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + R_3(t) \qquad (*)$$

Wir übersetzen nun $(*)$ in eine Gleichung für f:

Kettenregel

- $\varphi'(t) \overset{3.24(iii)}{=} Df(\xi+th)h \Longrightarrow \varphi'(0) = Df(\xi)\cdot h = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h\rangle$
- $\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\big(D_1f(\xi_1+th_1,\xi_2+th_2)\,h_1 + D_2f(\xi_1+th_1,\xi_2+th_2)\,h_2\big)$

$$= D_1D_1 f(\xi+th)h_1^2 + D_2D_1 f(\xi+th)h_2h_1 + D_1D_2 f(\xi+th)h_1h_2 + D_2D_2 f(\xi+th)h_2^2$$

$D_1^2 :=$ D_1D_1

Skalarprod

$$= \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} D_1^2 f & D_2D_1 f \\ D_1D_2 f & D_2^2 f\end{pmatrix}(\xi+th)}_{=:\,H(f)(\xi+th)}\, h,\ h\Big\rangle$$

$=: H(f)(\xi+th)$ die sog. Hesse-Matrix

genauer $H(f)(\xi) := \big(D_iD_j f(\xi)\big)_{i,j}$ 3.7 $\Longrightarrow$ $H(f)(\xi)$ symmetrisch falls $f\in C^2$

Insgesamt erhalten wir aus (*) die TAYLOR-ENTWICKLUNG von f in ξ

$$f(\xi+h) = f(\xi) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\xi), h\rangle}_{\text{lineare Näherung}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle}_{\text{quadratische Form}} + R_3(\xi)$$

Man kann zeigen, dass $\frac{\text{Rest}}{\|h\|} \to 0$ $(h \to 0)$.

4.4 DER SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN

(i) Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben sei eine Landschaft und wir interessieren uns für die Höhenschichtlinien (etwa in einer Landkarte). Können wir diese als Funktion darstellen & wie?

Globales Auflösen sicher unmöglich: keine Graphen von Fkt $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

(ii) Präzisierung der Problemstellung:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}$ eine C^1-Fkt.

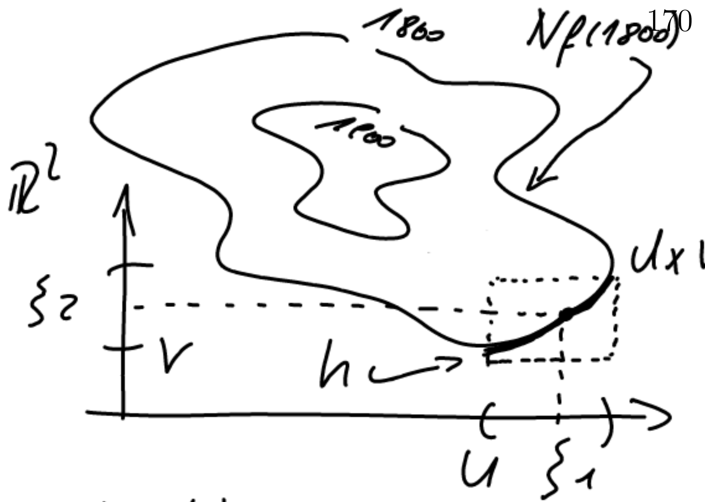
Können wir die sog. Niveaumengen

$$N_f(c) := \{(x,y) \in G : f(x,y) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

zumindest lokal, d.h. in einer Umgebung eines (jeden) Punktes $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in N_f(c)$, durch eine 1-d Fkt beschreiben? Genauer lautet die Frage also:

$$\exists\, h: U \to V \qquad U \text{ Umgebung von } \xi_1,\ V \text{ von } \xi_2 \quad (*)$$

sodass:
$$f(x,y) = c \iff y = h(x) \quad \forall (x,y) \in U \times V$$



Falls (*) erfüllt ist, dann sagt man

- Wir haben die Gleichung $f(x,y)=c$ „nach y aufgelöst"

bzw

- Die Fkt h ist (falls sie eindeutig ist), „durch die Gleichung $f(x,y)=c$ implizit gegeben"

[NAME!]

(iii) Bei der Antwort auf (ii) können wir 2 Fälle sofort ausschließen

- $c \notin f(U) \Longrightarrow N_f(c)=\emptyset$ und es ist nichts zu tun
- $\operatorname{grad} f(x)=0$ auf einer Umgebung W von ξ

$\overset{4.2(v)}{\Longrightarrow} f(x)=c$ auf W und $N_f(c)$ ist keine Kurve

Wir nehmen daher ab jetzt an:

$$\boxed{c \in f(U), \quad \operatorname{grad} f(\xi) \neq 0} \qquad (**)$$

(iv) Eine notwendige Bedingung und eine Info über h'

Ang (*) gilt, dann gilt $f(x,h(x))=c \quad \forall x \in U$

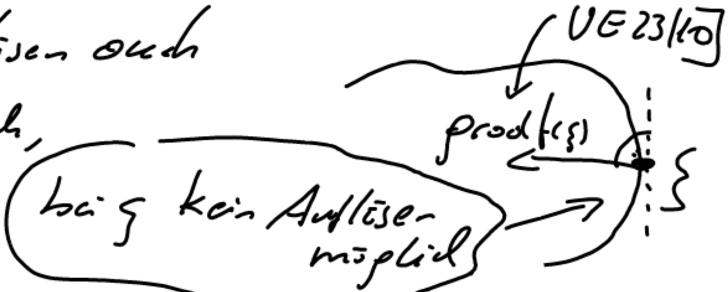
$$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} 0 = D_1 f(x,h(x)) + D_2 f(x,h(x))\, h'(x) \qquad (***)$$

$$\Longrightarrow D_2 f(\xi) \neq 0, \text{ denn sonst } \overset{(***)}{\Longrightarrow} D_1 f(\xi)=0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{grad} f(\xi)=0 \ \lightning \text{ zu } (**)$$

$$\Longrightarrow h'(x) = \frac{-D_1 f(x,h(x))}{D_2 f(x,h(x))}$$

(v) Die Bedeutung der notwendigen Bedingung $D_2 f(\xi) \neq 0$ ist, dass die Höhenschichtlinie nicht senkrecht ist; dann wäre ein Auflösen auch anschaulich nicht möglich, da der Graph der Fkt h „umdrehen" würde.



(vi) Der Witz des Satzes über implizite Fkt ist es, dass die notwendige Bed. auch hinreichend ist.

THM (IMPLIZITEN-SATZ) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ eine C^1-Fkt, $c \in \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in G$ mit $f(\xi) = c$ und $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$. Falls $D_2 f(\xi) \neq 0$, dann gibt es Umgebungen U von ξ_1 und V von ξ_2 und eine Fkt $h: U \to V$ sodass $h \in C^1$ und eindeutig mit der Eigenschaft

$$\forall x,y \in U \times V: \quad \left[\, f(x,y) = c \iff y = h(x) \,\right].$$

Außerdem gilt

$$h'(x) = -\frac{D_1 f(x, h(x))}{D_2 f(x, h(x))}$$

[Ein analoges Statement mit $D_1 f(\xi) \neq 0$ und $x = h(y)$ gilt ebenfalls.]

(vii) Ein BSP: $G = (0,\infty)^2$, $f(x) = x + y + \log(xy)$

$\xi = (1,1)$, $c = 2$ [check: $f(1,1) = 1 + 1 + \log(1) = 2$ ✓]

Wir wollen

$$x + y + \log(xy) = 2 \quad \text{bei } \xi = (1,1)$$

nach y auflösen.

Es gilt: $D_2 f(x,y) = 0 + 1 + \frac{1}{xy} x = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow D_2 f(1,1) = 2 \neq 0$

$\overset{(vi)}{\Longrightarrow}$ $\exists h$ stetig diffbar nahe $x=1$ mit

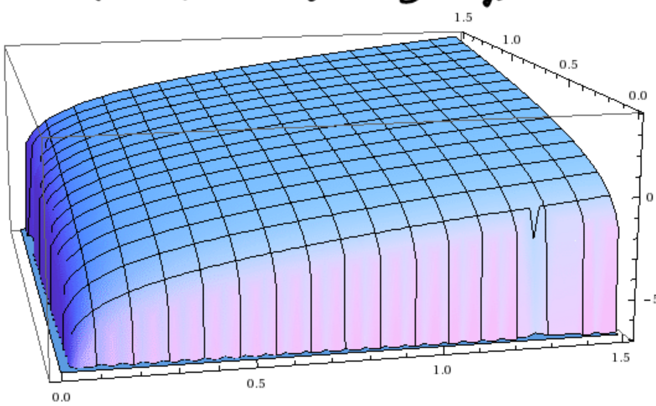
$$x + h(x) + \log(x\,h(x)) = 2$$

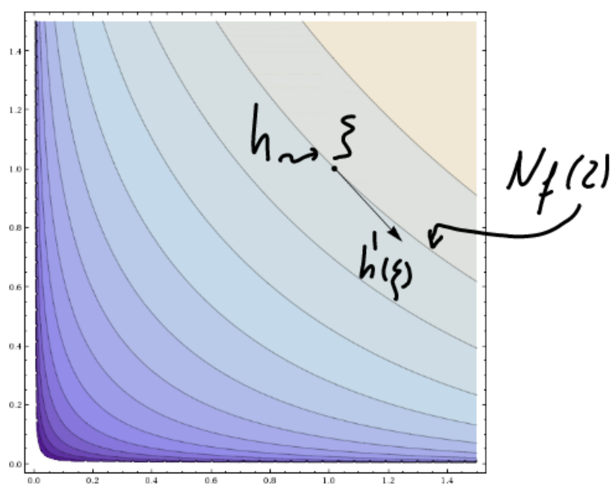
<u>ACHTUNG</u>: Das Thm liefert nur die Existenz von h, nicht aber die explizite Gestalt von h.
Immerhin aber doch

$$h'(x) = \frac{-D_1 f(x,h(x))}{D_2 f(x,h(x))} = -\frac{1+1/x}{1+1/h(x)}$$

$$\Longrightarrow h'(1) = -2/2 = \underline{-1}$$

$f(x,y) = x + y + \log(xy)$





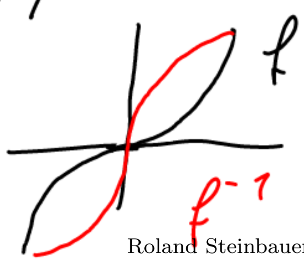
<u>4.5 UMKEHRSATZ</u> (Problem der Diffbarkeit der Umkehrfkt)

(i) Wir stellen uns nun folgende Frage. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $H \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: G \to H$ bijektiv ($\Rightarrow \exists\, f^{-1}: H \to G$) & diffbar.
<u>Ist dann $f^{-1}: H \to G$ diffbar?</u>

(ii) i.a. <u>NEIN</u>, denn sei $f: (-1,1) \to (1,1)$, $f(x) = x^3$

$$\Longrightarrow f^{-1}(y) = \begin{cases} y^{1/3} & 0 \le y < 1 \\ -|y|^{1/3} & -1 < y \le 0 \end{cases}$$

nicht diffbar bei $y=0$



$\left[h>0: \frac{1}{h}\left(f^{-1}(h) - f^{-1}(0)\right) = 1/h\, f^{-1}(h) = \frac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3} \to \infty \ (h\to 0) \right]$

(ii) Falls JA, dann muß $m=n$ und $Df(x)$ invertierbar sein!

Denn es gilt

$f^{-1}\circ f(x) = x \ \forall x\in G; \quad f\circ f^{-1}(y) = y \ \forall y \in H$ — Identische Matrix auf $\mathbb{R}^m$

Kettenregel $\Longrightarrow Df^{-1}(f(x))\,Df(x) = I_n; \quad Df(f^{-1}(y))\,Df^{-1}(y) = I_m$

$\Longrightarrow Df(x)$ injektiv [EMA 4.3.32(2)] $\Rightarrow n \le m$

$\Longrightarrow Df^{-1}(y)$ injektiv $\Rightarrow m \le n$

$\Rightarrow m = n$ und somit $Df(x)$ bijektiv

$\Longrightarrow D(f^{-1})(f(x)) = \left(Df(x)\right)^{-1}$

NICHT VORGETRAGEN

(iii) Invertieren vs Auflösen: Dem Invertieren von f entspricht das Auflösen von $f(x)=y$ nach x bzw das Auflösen von $F(x,y) := f(x) - y = 0$ nach x. Daher läßt sich der Implizite-Satz 4.4(vi) verwenden um folgenden Umkehrsatz zu beweisen

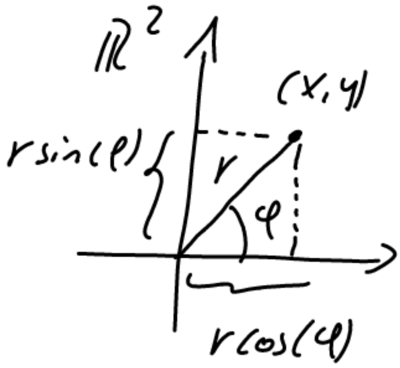
(iv) THM (Umkehrsatz) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$, $\xi\in G$ mit $Df(\xi)$ invertierbar. Dann gibt es Umgebungen U von ξ und V von $f(\xi)$ sodass $f: U \to V$ bijektiv ist und $f^{-1}: V \to U$ stetig diffbar mit

$$Df^{-1}(f(x)) = \left(Df(x)\right)^{-1} \quad \forall x\in U.$$

inv. Matrix

(v) Diffeomorphismen. Abbildungen wie in (iv) heißen (lokale) Diffeomorphismen; genauer $f: U\to V$ bijektiv, $\mathcal{C}^1$ mit $\mathcal{C}^1$-Inverse heißt ($\mathcal{C}^1$) Diffeomorphismus [analyt., C^k-Diffeo, C^∞-Diffeo.]

(vi) BSP (POLARKOORDINATEN)



$$f: G:=(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad f(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

ist C^1 und $Df(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\varphi), -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi), r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \det(Df(r,\varphi)) = r(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) = r>0$

$\overset{\text{lin Alg}}{\Longrightarrow}$ $Df(r,\varphi)$ invertierbar $\forall (r,\varphi)\in G$

$\overset{(v)}{\Longrightarrow}$ f ist in der Umgebung jedes Pktes $(r,\varphi)\in G$ ein Diffeo und $Df^{-1}(f(r,\varphi))=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

WARNUNG: f ist global (d.h. auf G) kein Diffeo

4.6. EXTREMWERTE.

(i) Wir beschäftigen uns nun mit lok. Extremwerten von Fkt $f: \mathbb{R}^n\supseteq G\to\mathbb{R}$ [$\mathbb{R}^m$ hätte wenig Sinn?]. Zunächst können die Definitionen aus dem 1-D Fall wortwörtlich übernehmen [[3] Def 2.2].

DEF (lok Extrema)

Ein Pkt $\xi\in G$ heißt lokales Maximum [Minimum], falls $\exists$ Umgebung U von ξ mit $f(x)\le f(\xi)$ $\forall x\in U\cap G$ $(*)$
$[f(x)\ge f(\xi)]$

Ein Max [Min] heißt strikt, falls in $(*)$ $<$ [$>$] statt $\le$ [$\ge$] gilt.

(ii) Wie im 1-d-Fall ist das Verschwinden der Ableitung eine notwendige Bedingung für ein Extremum; genauer gilt die folgende [vgl [2] Prop 2.4]

PROP (Notwendige Bedingung für Extrema) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und $\xi \in G$ ein lok. Extr. Dann gilt

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\xi) = 0.}$$

Beweis [Anwenden des 1-d Satzes längs der Koordinatenachsen.]
$\forall 1 \le i \le n$ betrachte $\varphi_i(t) := f(\xi + t e_i)$
ξ lok Extr für $f \Rightarrow t=0$ lok Extr. für φ_i

$$\xRightarrow{[2]\,2.4} 0 = \varphi_i'(0) = D_i f(\xi) \Rightarrow Df(\xi) = 0 \qquad \square$$

(iii) Heuristik für hinreichende Bedingung
Aus dem 1d-Fall wissen wir, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend ist [vgl. [3] 2.6] sondern für „Kandidatenstellen" ξ mit verschwindender 1. Ableitung die 2. Ableitung in ξ betrachtet werden muß [[3] 2.18].

Um ein analoges Vorgehen im Fall $n=2$ zu erforschen ziehen wir die Taylorentwicklung 4.3(v) heran, also

$$f(\xi+h) = f(\xi) + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle}_{=0 \text{ für „Kandidatenstellen"}} + \frac{1}{2}\langle Hf(\xi)h, h\rangle + \text{Rest}$$

Also wird das Verhalten von f nahe ξ von der Hesse-Matrix

$$Hf(\xi) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(\xi) & D_1 D_2 f(\xi) \\ D_1 D_2 f(\xi) & D_2^2 f(\xi) \end{pmatrix} =: A$$

dominiert, genauer gilt für x nahe ξ (dort wo Rest klein)

$$f(x) \approx f(\xi) + \frac{1}{2}\underbrace{\langle A(x-\xi) \mid (x-\xi)\rangle}$$

(iv) FAKTEN AUS DER LIN ALG.

$$\begin{cases} >0, \text{ falls } A \text{ positiv definit} \\ <0, \text{ falls } A \text{ negativ definit} \end{cases}$$

Eine symmetrische $(n\times n)$-Matrix A heißt [Heuser 2, 172.5]

- positiv definit, falls $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ $\langle Ax|x\rangle > 0$
- positiv semidefinit — " — ≥ 0
- negativ definit — " — < 0
- negativ semidefinit — " — ≤ 0
- indefinit, falls $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Ax|x\rangle > 0$, $\langle Ay|y\rangle < 0$

Ein Satz der lin. Alg [Heuser 2, 172.6] besagt für symmetrische (2×2)-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $\Delta = \det(A) = ac - b^2$:

$$\begin{aligned} A \text{ pos definit} &\iff \Delta > 0,\ a > 0 \\ \text{negativ def.} &\iff \Delta > 0,\ a < 0 \\ \text{indefinit} &\iff \Delta < 0 \end{aligned}$$

(v) Die Heuristik aus (iii) führt zum folgenden

SATZ (Hinreichende Bed f. lok. Extrema) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $f: G \to \mathbb{R}$ eine C^2-Fkt und $\xi \in G$ mit $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} Hf(\xi) \text{ pos. definit} &\Rightarrow \xi \text{ striktes lokales Min} \\ \text{neg. definit} &\Rightarrow \xi \text{ — " — Max} \\ Hf(\xi) \text{ indefinit} &\Rightarrow \xi \text{ kein lok Extr} \end{aligned}$$

man sagt auch Sattel

(vi) Die Bedingungen in (v) sind wie im 1d-Fall nicht notwendig. Außerdem kann im Fall $Hf(\xi)$ (pos. oder neg.) semidefinit keine allg. Aussage gemacht werden.

(vii) Bsp. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = yx^2 - y^3 + 6y^2 - 9y$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy,\ x^2 - 3y^2 + 12y - 9)$$

krit. Pkte: $x = 0$ oder $y = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$

$$\Downarrow\quad y^2 - 4y + 3 = 0 \quad y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 1, 3$$

$$\Rightarrow \xi_1 = (0,1),\ \xi_2 = (0,3),\ \xi_3 = (3,0),\ \xi_4 = (-3,0)$$

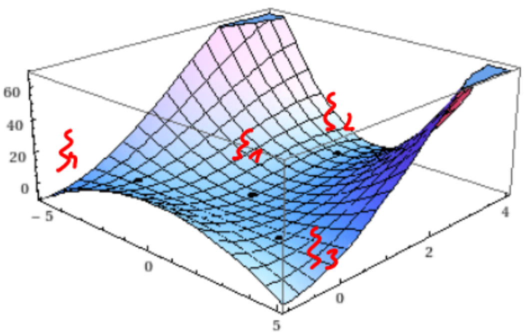
Hesse-Matrix
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -6y+12 \end{pmatrix}$$

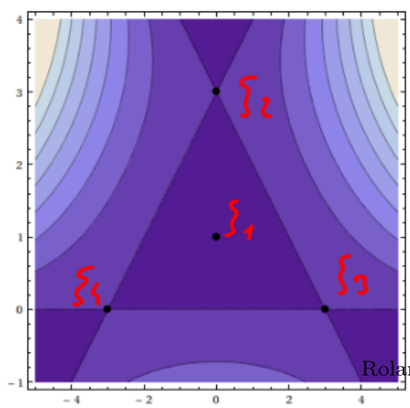
$$\Rightarrow Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},\ \Delta = 12 > 0,\ a = 2 > 0 \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \text{pos def} \overset{(v)}{\Longrightarrow} \text{lok Min in } (0,1)$$

$$Hf(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},\ \Delta = -36 < 0 \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \text{indefinit} \overset{(v)}{\Longrightarrow} \text{Sattelpkt in } (0,3)$$

$$Hf(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},\ \Delta = -36 < 0 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattel in } (3,0)$$

$$Hf(-3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},\ \Delta = -36 < 0 \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattel in } (-3,0)$$





7 Integration

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu. Wie im Fall $n=1$ ersichtlich haben der Integralrechnung 2 Aspekte an.

(1) Berechnen der Fläche unter einem Fktsgraphen

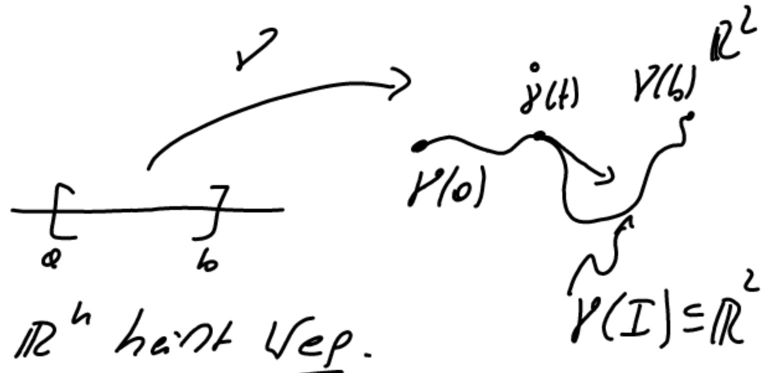
(2) Berechnen von Stammfkt

Wir werden zunächst (2) aufgreifen und Stammfkt für VF v auf $\mathbb{R}^n$ suchen, d.h. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} \varphi$. Das wird grob gesprochen durch Herstellen einer 1-d Situation über Kurven erreicht; genauer indem VF über Kurven integriert werden. Damit beschäftigen wir uns in §2. In §1 beschäftigen wir uns zur Vorbereitung mit Kurven.

Aspekt (2) greifen wir in §3 auf wo wir den R-Integralbegriff so erweitern, dass wir Volumina unter den Graphen skalarwertiger Fkt berechnen können.

Im abschließenden §4 beschäftigen wir uns mit Oberflächenintegralen & den Integralsätzen von Stokes & Gauß, die weitgehende Verallgemeinerungen des HsDI darstellen.

§1 Wege & Kurven



1.1. Def (Weg) [Gamma]

(i) Eine stetige Abb $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg.
Ist $I=[a,b]$ und $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$, dann heißt γ Weg von p nach q.

(ii) Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ ein diff'barer Weg. Dann heißt $\dot\gamma(t) := D\gamma(t)$ $(\in \mathbb{R}^n)$ Tangentenvektor an γ im Pkt $\gamma(t)$. [Falls $\dot\gamma(t) \neq 0$, dann heißt $\dot\gamma(t)/\|\dot\gamma(t)\|$ Tangenteneinheitsvektor.]

(iii) Ein $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär, falls $\dot\gamma(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

1.2 Interpretation & Bsp

(i) Kinematische Interpretation aus der Physik:

I ... Zeitintervall

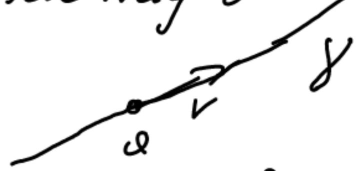
$\gamma(t)$ ... Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt $t \in I$

$\dot\gamma(t)$ ... Momentangeschwindigkeit(svektor) [velocity]

$\|\dot\gamma(t)\|$ ... „Betrag" der Momentangeschw. [speed]

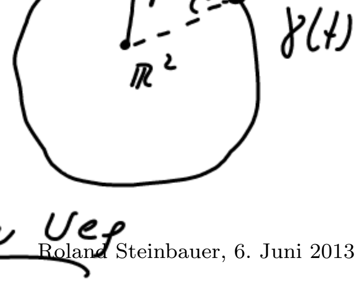
(ii) a, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$; $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = a + tv$ Gerade durch a in Richtung v

$\dot\gamma(t) = v$ $\forall t$ $\Rightarrow$ γ ist regulärer Weg



(iii) Sei $r > 0$, $I = [0, 2\pi]$ [vgl. [6] 2.4(i)]

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$ Kreis um den Ursprung mit Radius r



$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t) \perp \gamma(t) \ \forall t$$

$\|\dot\gamma(t)\| = r > 0 \Rightarrow$ reguläre Weg

(iv) Seien $r, c > 0$, $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix}$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ \underset{\neq 0}{c} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{reguläre Weg}$$

Schraubenlinie
vgl [6] 2.4(i)

1.3 WEG vs KURVE

[SIGMA] (i) Oft ist man weniger an der konkreten Fkt $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ interessiert als an ihrem Bild $\gamma(I)$, das man natürlich auch durch andere Fkt $\sigma: J \to \mathbb{R}^n$ (J ein Intervall) „erzeugen" kann. Wir wollen alle solche Funktionen miteinander identifizieren. Präziser fassen wir diese Idee in den folgenden Definitionen.

(ii) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Eine zulässige Parametertransformation ist eine C^1-Fkt: $\varphi: I \to J$ mit $\varphi'(t) > 0 \ \forall t \in I$

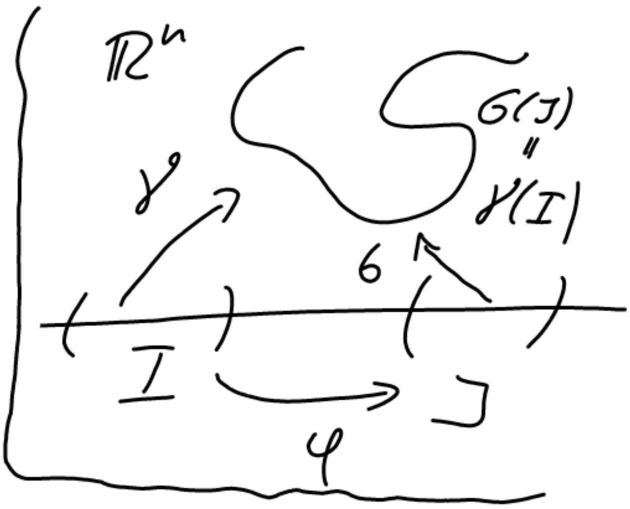
[PHI] Zwei Wege $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma: J \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine zulässige Parametertrafo $\varphi: I \to J$ gibt mit $\sigma \circ \varphi = \gamma$; wir schreiben dann $\gamma \sim \sigma$.
Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in $\mathbb{R}^n$ definiert.

Eine orientierte reguläre Kurve C ist dann definiert als eine Äquivalenzklasse regulärer Wege. Jeder Repräsentant γ von C heißt dann eine Parametrisierung von C.

(iii) Veranschaulichung & Bsp

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le \pi \quad \mathbb{R}$$



$\gamma \sim \sigma$ denn $\varphi: [0,2\pi] \to [0,\pi]$, $t \mapsto t/2$

ist zulässige Parametertrafo [$\varphi'(t) = 1/2 > 0 \ \forall t$] und

$\sigma \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\sigma \circ \varphi(t) = \sigma(t/2) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \gamma(t).$$

1.4. BOGENLÄNGE

Wir wollen nun den Begriff „Länge einer Kurve" präzisieren

(i) Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ ein regulärer Weg, dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Weglänge von γ.

(ii) Bsp: $\gamma: [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}}_{1} \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(iii) In der kinematischen Interpretation [vgl. 1.2(i)] ist $\|\dot{\gamma}(t)\|$ der Betrag der Momentangeschw. und somit entspricht $L(\gamma)$ dem zurückgelegten Weg.

Eine andere Möglichkeit zu sehen, dass $L(\gamma)$ die „Länge des Weges" beschreibt steckt in der Aussage:

$L(\gamma)$ = Limes der Gesamtlängen eingeschriebener Polygone
[siehe Hauser 7, 178]

einfache Rechnung: verwendet Kettenregel & Substitution

(iv) Man kann zeigen, dass die Weglänge unabhängig von der Parametrisierung ist; genauer $\gamma \sim \sigma \Rightarrow L(\gamma) = L(\sigma)$. Daher kann der Begriff der Bogenlänge einer Kurve definiert werden. [genauer $L(C) = L(\gamma)$ für eine resp. jede Parametrisierung γ von C.]

(v) Parametrisierung nach der Bogenlänge: Unter allen Parametrisierungen γ einer Kurve C ist eine ausgezeichnet: die für die gilt $\|\dot\sigma(t)\| = 1 \ \forall t$. Das wird dadurch erreicht, dass der „neue Parameter" gleich der Länge der Kurve ist; genauer sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ irgendeine Param. von C. Wir definieren

$$\varphi^{-1}(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(s)\|\, ds, \quad \sigma = \gamma \circ \varphi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n.$$

Nun ist φ zulässige Paratrafo, denn $(\varphi^{-1})'(t) = \|\dot\gamma(t)\|$

$$\Rightarrow \varphi'(s) = 1/(\varphi^{-1})'(\varphi(s)) = 1/\|\dot\gamma(\varphi(s))\| > 0 \quad [\text{da } \gamma \text{ regulär}]$$

und es gilt $\dot\sigma(s) = \dot\gamma(\varphi(s))\, \varphi'(s) = \dot\gamma(\varphi(s)) / \|\dot\gamma(\varphi(s))\|$

also tatsächlich $\|\dot\sigma(s)\| = 1$.

1.5 AUSBLICK (Krümmung – Differentialgeometrie)

Ist C eine Kurve mit Param. nach Bogenlänge γ. Dann gilt

$$1 = \|\dot\gamma(t)\|^2 = \langle \dot\gamma(t) \,|\, \dot\gamma(t) \rangle$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \quad 0 = 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle \quad (*)$$

$\ddot\gamma$ wird Beschleunigungsvektor genannt; (*) besagt $\ddot\gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$ also enthält nur $\|\ddot\gamma(t)\|$ eine relevante/neue Information.

Die Größe $\|\ddot\gamma(t)\|$ wird Krümmung von C im Pkt $\gamma(t)$ genannt. Die Krümmung ist der Schlüsselbegriff des math. Gebiets der DIFFERENTIALGEOMETRIE!

Geometrie mit Hilfe der Differentialrechnung/Analysis

Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$ werden im Rahmen der sog. ELEMENTAREN DIFF-GEOMETRIE studiert.

mögliches Seminarthema