§2 KURVENINTEGRALE

2.1 INTRO

In diesem § befassen wir uns mit STAMMFUNKTIONEN von Vektorfeldern. Genauer sei $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld [vgl. [6] 2.4(iii)]. Wir fragen uns unter welchen Umständen

$$\exists\, \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ sodass } \operatorname{grad} \varphi = v$$

und wie wir so ein φ konkret finden können. D.h. wir steuern auf Verallgemeinerungen des HsDI [[4] 2.7] zu.

Als Schlüsselbegriffe werden sich KURVENINTEGRALE und deren WEGUNABHÄNGIGKEIT erweisen. Wir beginnen also mit folgenden Begriffen.

Idee: „über" Kurven in die 1d Situation gelangen

2.2 KURVENINTEGRAL

(i) DEF (Wegintegral) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, v ein stetiges VF auf G [d.h. $v: G \to \mathbb{R}^n$ stetig], $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg mit $\gamma([a,b]) \subseteq G$. Dann heißt

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t) \rangle \, dt$$

Projektion von v in Richtung der Tangente an γ; siehe (iii)

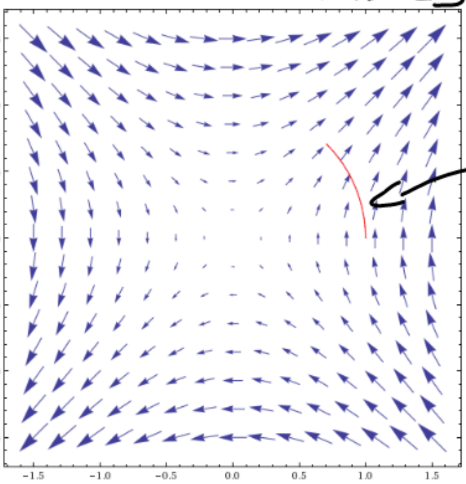
das WEGINTEGRAL von v längs γ.

Dieselbe Def funktioniert auch, falls γ nur stückweise $\mathcal{C}^1$ ist, d.h. γ stetig und $\exists\, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\gamma|_{(t_{i-1}, t_i)}$ ist $\mathcal{C}^1$ [denn die endlich vielen „Problemstellen" spürt das Integral nicht; Details [Heuser 2, §180]].

(ii) BSP $U=\mathbb{R}^2$, $v(x,y)=(y,x)$, $\gamma:[0,\pi/4]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$

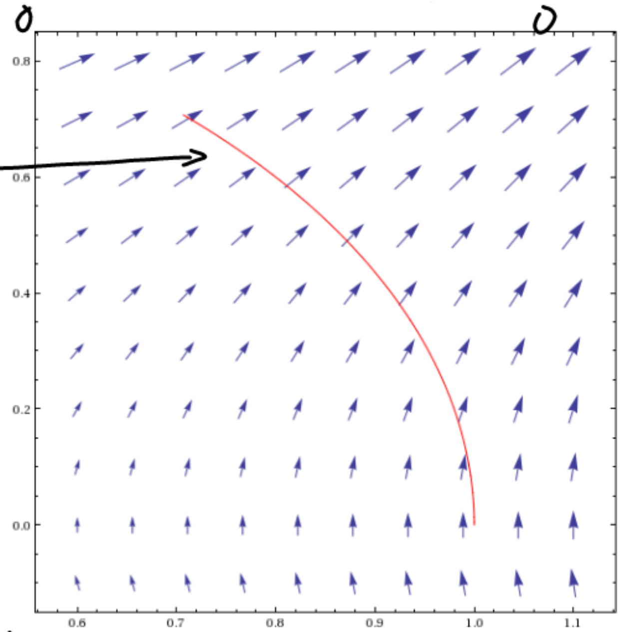
$$\int_\gamma v = \int_0^{\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \underbrace{\left(-\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)}_{\cos(2t)\ [3]\,3.17(iv)} dt = \int_0^{\pi/4}\cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$



γ

Viertelkreis



(ii') Zur Bedeutung von $\int_\gamma v$

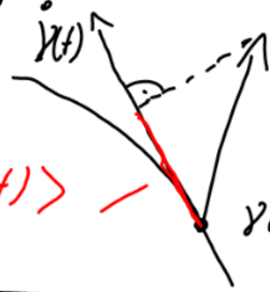
$$\int_a^b \underbrace{\langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t)\rangle}_{} dt$$

Tangentenvektor an γ

$\approx$ Summe der Anteile des VF in Richtung der Kurve

Projektion von v längs $\dot\gamma$

VF v längs γ



$\dot\gamma(t)$ $v(\gamma(t))$ $\gamma(t)$

$\langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle$

Physikalische Interpretation:

$\int_\gamma v$ ist die Arbeit die verrichtet wird falls ein Massepunkt längs γ im Kraftfeld v bewegt wird.

(iii) Eigenschaften des Wegintegrals

- $\left|\int_\gamma v\right| \le \max\limits_{a\le t\le b} \|v(\gamma(t))\|\cdot L(\gamma)$

[3] 1.15(iii)

$$\Big[\ \left|\int_\gamma v\right| \overset{[3]\,1.19}{\le} \int_a^b \underbrace{\left|\langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t)\rangle\right|}_{\overset{CS}{\le} \|v(\gamma(t))\|\,\|\dot\gamma(t)\|} \le \int_a^b \|v(\gamma(t))\|\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

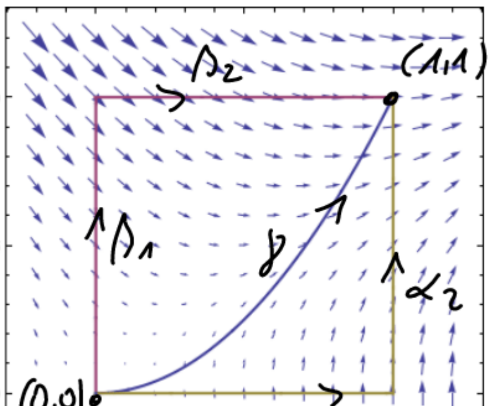
$$\exists \text{ wegen } [6]\ 2.15(i) \quad \overset{MWSS}{\le} \max_{a\le t\le b}\|v(\gamma(t))\| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \max_{a\le t\le b}\|v(\gamma(t))\|\, L(\gamma)\ \Big]$$

- Das Wegintegral ist invariant unter Parametertrafos, genauer sei $\varphi: J \to I$ eine zulässige Parametertrafo, dann gilt
$$\boxed{\int_{\gamma\circ\varphi} v = \int_{\gamma} v.}$$

Daher kann man stetige VF über Kurven integrieren, genauer sei C eine Kurve mit Parametrisierung γ dann ist
$$\boxed{\int_C v := \int_{\gamma} v}$$
wohldefiniert (d.h. nicht von der Wahl von γ abhängig) und wir sprechen vom KURVENINTEGRAL von v über C.

2.3 EIN BSP & EINE FRAGE

Sei: $G = \mathbb{R}^2$ und v ein VF auf $\mathbb{R}^2$ mit $v(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$
und seien α, β, γ Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$
wie folgt



$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (t, t^2)$

$\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2, \ \alpha_1(t) = (t, 0) \quad 0 \le t \le 1$

$\qquad \alpha_2(t) = (1, t-1) \quad 1 \le t \le 2$

$\beta = \beta_1 \oplus \beta_2, \ \beta_1(t) = (0, t) \quad 0 \le t \le 1$

$\qquad \beta_2(t) = (t-1, 1) \quad 1 \le t \le 2$

Aneinanderhängung von Wegen: Zuerst α_1, dann α_2; das ergibt nur einen stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg – ist fürs Wegintegral aber egal [siehe (i)]

Wir berechnen

$$\int_\alpha v = \int_{\alpha_1} v + \int_{\alpha_2} v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ 2-t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 0\, dt + \int_1^2 (2-t)\, dt = -\frac{1}{2}(2-t)^2 \Big|_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\beta v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 -t\, dt + \int_1^2 1\, dt = -\frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_\gamma v = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t-t^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 \left(t^2 + 2t(t-t^2)\right) dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 2t^3)\, dt = \left(t^3 - \frac{t^4}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

ALLE GLEICH !?

Das Wegintegral von v ist also für alle 3 Wege von (0,0) nach (1,1) gleich! WARUM? Kann doch kein Zufall sein

Um diese Frage auf den Grund zu gehen brauchen wir etwas Terminologie...

2.4 STAMMFUNKTIONEN & GRADIENTENFELDER

(i) DEF (Stammfkt & Gradfelder) Sei v ein VF auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Falls $\exists \psi : G \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

(PSI)

$$\{\operatorname{grad} \psi = v\}$$

dann sagen wir v ist ein GRADIENTENFELD und ψ ist eine STAMMFUNKTION für v (auf G).

[Physik: $K = -\operatorname{grad} \varphi$, φ Potential für das Kraftfeld K]

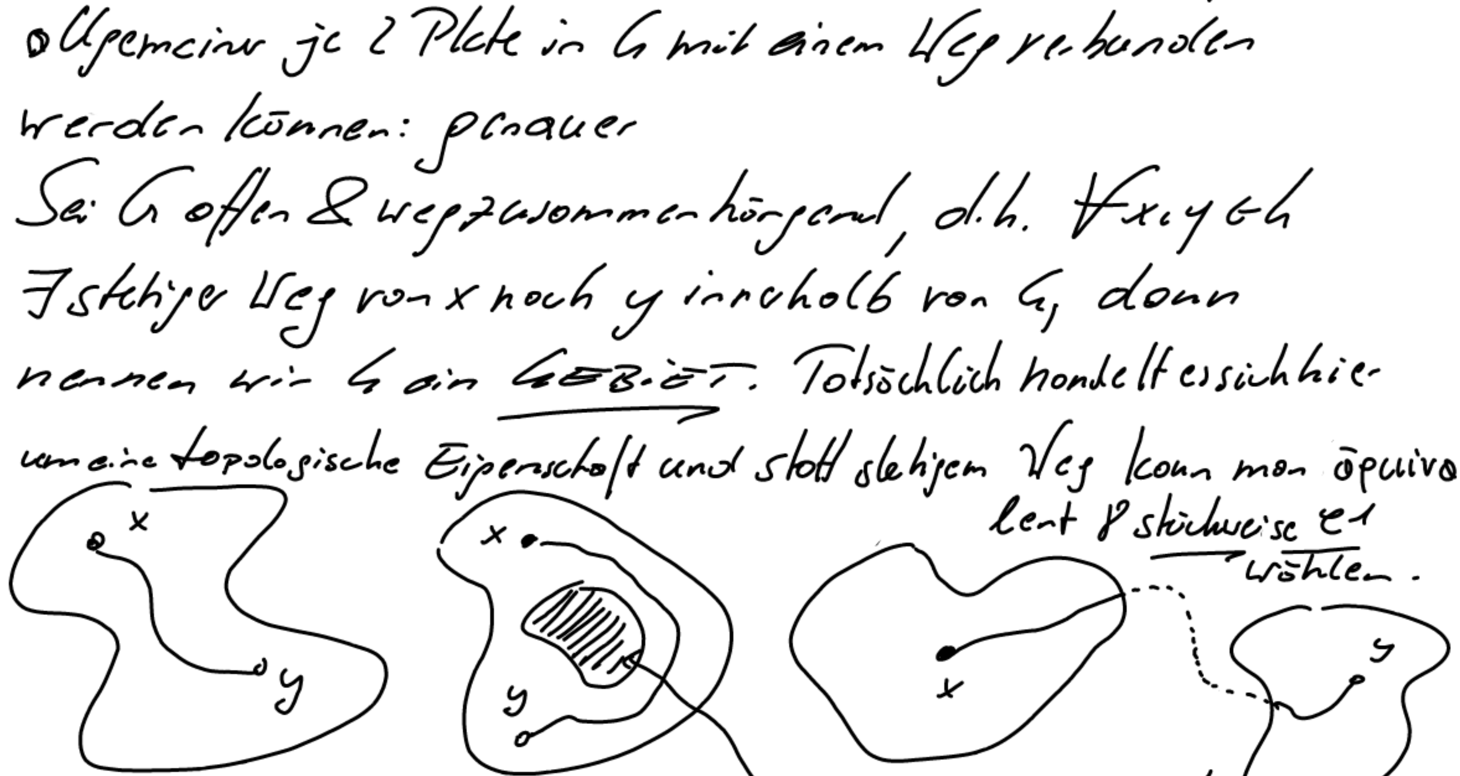
(ii) (Zur Eindeutigkeit von Stammfkt) Sei v ein $\mathcal{C}^0$-VF und sei ψ Stammfunktion von v, dann ist auch $\psi+c$ für jede Konstante $c\in\mathbb{R}$ eine Stammfkt für v.
$[\operatorname{grad}(\psi+c) = \operatorname{grad}\psi = v]$

Sind umgekehrt φ,ψ zwei Stammfkt von v auf $G = B_r(x_0)$, dann ist $\varphi-\psi$ konstant, denn

offener Ball um x_0 $B_r(x_0)=\{x:\|x-x_0\|<r\}$

$$\operatorname{grad}(\varphi-\psi) = \operatorname{grad}(\varphi)-\operatorname{grad}(\psi) = v-v=0$$
$$\Rightarrow D_i(\varphi-\psi)=0 \ \forall\, 1\le i\le n$$
$$\overset{[6]\,4.2(iv)}{\Longrightarrow} \varphi-\psi \text{ konstant auf } B_r(x_0)$$

Hier wird essentiell der MWS [6] 4.2(iv) benötigt also dass die Verbindungsstrecken von je 2 Pkten in G wieder in G liegen. Tatsächlich bleibt obige Aussage richtig falls allgemeiner je 2 Pkte in G mit einem Weg verbunden werden können: genauer
Sei G offen & wegzusammenhängend, d.h. $\forall x,y\in G$ $\exists$ stetiger Weg von x nach y innerhalb von G, dann nennen wir G ein GEBIET. Tatsächlich handelt es sich hier um eine topologische Eigenschaft und statt stetigem Weg kann man äquivalent & stückweise $\mathcal{C}^1$ wählen.



Nun gilt: Auf einem Gebiet unterscheiden sich je 2 Stammfkt von v nur um eine Konstante

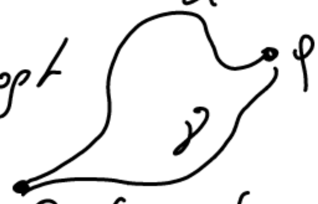
(iii) Eine wichtige Eigenschaft von Gradientenfeldern (die hinter dem überraschenden Ergebnis in 2.3 steckt) ist

SATZ (Gradientenfelder haben wegunabhängige Kurvenint.)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, v ein stetiges Gradientenfeld auf G mit Stammfkt φ. Dann gilt $\forall\, p, q \in G$ und alle C^1-Wege γ von p nach q, die ganz in G verlaufen

$$\int_\gamma v = \varphi(q) - \varphi(p) \qquad (*)$$

Insbesondere hängt $\int_\gamma v$ nicht von γ ab; man sagt v hat wegunabhängige (Kurven-)Integrale



$\int_\alpha v = \int_\gamma v$

Bemerke (*) entspricht genau dem 2. Teil des HsDI:

$$\int_a^b f(t) = F(b) - F(a) \text{ für } F \text{ mit } F' = f.$$

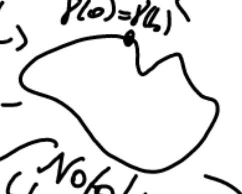
Beweis: Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wie oben. Definiere $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F = \varphi \circ \gamma$

$$\Rightarrow F'(t) = \big(\varphi(\gamma(t))\big)' \underset{\substack{3.25(ii)\\ \text{bzw UE } 23[8]}}{=} \langle \operatorname{grad} \varphi(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle = \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma v \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt \overset{(**)}{=} \int_a^b F'(t)\, dt \overset{\text{HsDI}}{=} F(b) - F(a)$$

$$\overset{\text{Def } F}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(q) - \varphi(p). \qquad \square$$

(iv) Geschlossene Wege. Ein Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$. Hat ein VF wegunabhängige Integrale, dann gilt offensichtlich für alle Wegintegrale über geschlossene Wege $\oint_\gamma v = 0$



Notation für Wegint. über geschlossene Wege

Man kann auch leicht die Umkehrung zeigen.

(v) Bleibt also nur noch die Frage, ob VF mit wegunabhängigen Integralen auch Stammfk haben. Die positive Antwort gibt der folgende

SATZ (VF mit wegunabh. Integralen sind Gradientenfelder)

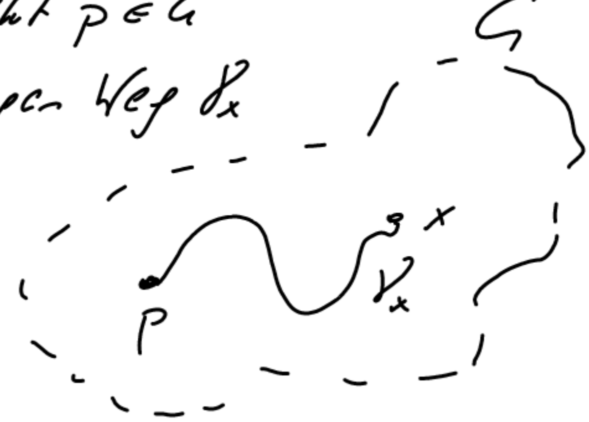
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und v ein stetiges VF auf G mit wegunabhängigen Integralen. Dann

$$\exists \varphi : G \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^1 : \operatorname{grad} \varphi = v,$$

d.h. v ist ein Gradientenfeld.

Darüberhinaus kann eine Stammfkt konkret wie folgt konstruiert werden:

- fixiere einen beliebigen Pkt $p \in G$
- für $x \in G$ wähle einen beliebigen Weg γ_x von p nach x
- setze $\varphi(x) = \int_{\gamma_x} v \quad (*)$



Bemerke (*) ist ein Analogon zum 1. Teil des HsDI:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies F' = f$$

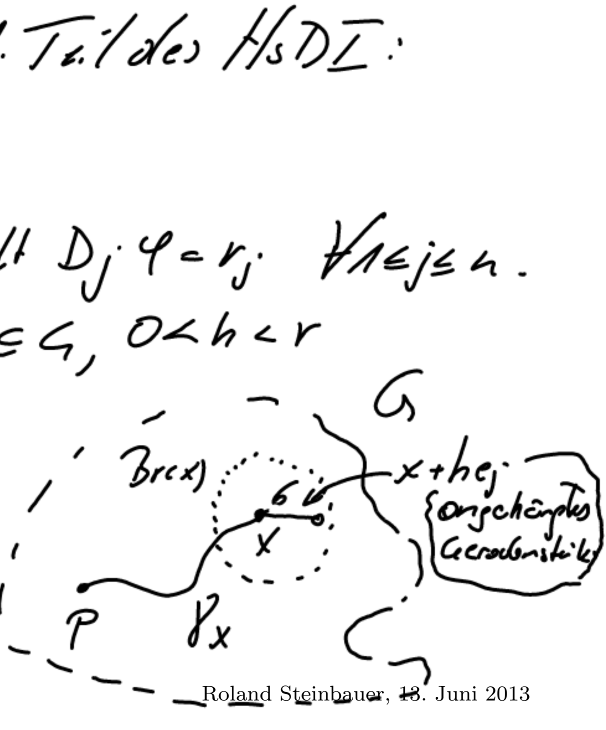
Beweis: Zu zeigen ist: für φ wie in (*) gilt $D_j \varphi = v_j \ \forall 1 \le j \le n$.

Sei dazu $B_r(x)$ so klein, dass $B_r(x) \subseteq G$, $0 < h < r$

$\sigma : [0,1] \to B_r(x)$, $\sigma(t) = x + th e_j$

$\implies \sigma$ ist $\mathcal{C}^1$-Weg von x nach $x + he_j$

OBdA ist $\gamma_x : [-1,0] \to G$ so parametrisiert, dass $\gamma(-1) = p$, $\gamma(0) = x$



AUF FOLIE VORGETRAGEN

Wir betrachten die Aneinanderhängung $\gamma_x \oplus \sigma$; das ist ein stückweiser C^1-Weg von p nach $x+he_j$. Nun gilt

Integrale wegunabh.

$$\underbrace{\left|\frac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h} - v_j(x)\right|}_{ZZ:\ \to 0} = \frac{1}{|h|}\left|\int_{\gamma_x\oplus\sigma} v - \int_{\gamma_x} v - h v_j(x)\right|$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\cancel{\int_{\gamma_x} v} + \int_\sigma v - \cancel{\int_{\gamma_x} v} - v_j(x)\int_\sigma e_j\right|$$

Trick: $\int_\sigma e_j = \int_0^1 \langle e_j | he_j\rangle = h\int_0^1 dt = h$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_\sigma (v - v_j(x)e_j)\right|$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 \langle v(x+the_j) - v_j(x)e_j \,|\, \overset{\dot\sigma(t)\ \forall t}{he_j}\rangle\, dt\right|$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 h\,(v_j(x+the_j) - v_j(x))\,dt\right| \leq \int_0^1 |v_j(x+the_j) - v_j(x)|\,dt \longrightarrow 0$$

v_j stetig $\overset{[2]\ 2.16}{\Longrightarrow}$ $v_j(x+the_j)$ glm stetig für $t\in[0,1]$

$\Longrightarrow |v_j(x+the_j) - v_j(x)| \to 0$ glm auf $[0,1]$ $(h\to 0)$

$\overset{[5]\ 1.10}{\Longrightarrow} \int_0^1 \underbrace{\qquad}\ \to 0 \quad (h\to 0)$

$$\Longrightarrow D_j\varphi(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+the_j)-\varphi(x)}{h} = v_j(x). \qquad \square$$

(vi) Zusammengefaßt haben wir also folgende Situation auf Gebieten

$$\boxed{\begin{array}{c} v \text{ ist Gradientenfeld} \\ \text{d.h. } \exists\varphi: \operatorname{grad}\varphi = v\end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} v \text{ hat wegunabhängige} \\ \text{Integrale}\end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\oint_\gamma v = 0}$$

Bleibt noch die Frage: Wie kann praktisch überprüft werden, ob ein gegebenes $\mathcal{C}^0$-VF v ein Gradientenfeld ist? Um zu einer Antwort zu gelangen beginnen wir mit einer Beobachtung...

$\int_\alpha v = \int_\beta v$ für alle Wege zwischen allen Paaren von Pkten kann man schwer nachprüfen...

2.5 INTEGRABILITÄTSBEDINGUNGEN

(i) Beobachtung: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ und $\operatorname{grad} \varphi = v$. Dann gilt

$$\underline{D_k v_j} = D_k D_j v \overset{\text{Satz v.}}{\underset{\text{Schwarz}}{=}} D_j D_k v = \underline{D_j v_k}, \text{ d.h.}$$

$$v\ \mathcal{C}^1 \text{ Gradientenfeld} \Longrightarrow \boxed{D_k v_j = D_j v_k \quad \forall\, 1 \le j,k \le n}$$

die sog. INTEGRABILITÄTSBED.

(ii) Ein aufklärendes Bsp: $v(x,y) = (y, x-y)$ auf $\mathbb{R}^2$ — also das VF aus 2.3. Es gilt

$$D_2 v_1(x,y) = 1 = D_1 v_2(x,y) \Longrightarrow \text{Integrabilitätsbed erfüllt}$$

Tatsächlich hat v auch eine Stammfkt, z.B. $\varphi(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$

Probe: $\operatorname{grad} \varphi(x,y) = (y, x-y)$

Somit ist aufgeklärt, warum alle 3 Integrale in 2.3 übereinstimmen!

(iii) <u>Ein problematisches Bsp</u>: $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$w(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$D_2 w_1(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

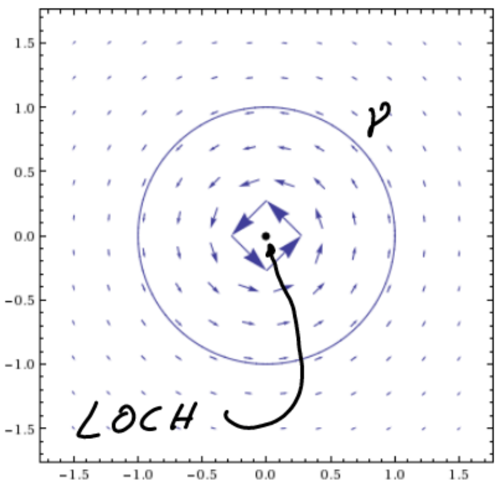
$$D_1 w_2(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

$=$

Also erfüllt w die Integrabilitätsbedingungen.!

<u>ABER</u> <u>w ist kein Gradientenfeld,</u>

denn sei $\gamma:[0,2\pi]\to G \quad \gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$



$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin(t)}{1} \\ \frac{\cos(t)}{1}\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

$\overset{2.4(iii)}{\Longrightarrow}$ w <u>kein</u> Gradientenfeld

(iv) Es stellt sich heraus, dass das Problem im Bsp (iii) vom „Loch" im Gebiet $G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ herrührt!

Man kann sogar die Existenz von VF ohne Stammfkt, die die Integrabilitätsbedingungen erfüllen zum „Erkennen von Löchern" in Gebieten einsetzen; das führt zur KOHOMOLOGIETHEORIE einem Teilgebiet der ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE.

FOLIE

Wir werden hier eine spezielle Art der „Löchervermeidung" ins Auge fassen.

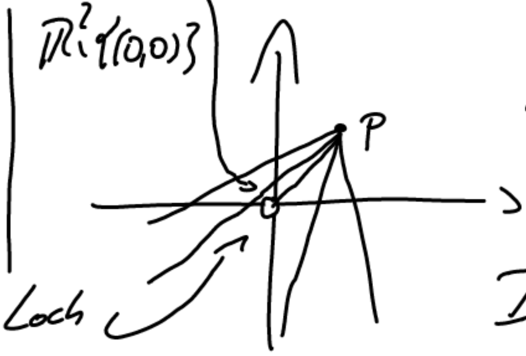
(v) Eine Menge $M\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt **STERNFÖRMIG**, falls $\exists p\in M: \forall x\in M$ liegt die Verbindungsstrecke von p nach x ganz in M

Zentrum

sternförmig

„Jeder Winkel kann vom Zentrum aus ausgeleuchtet werden"

nicht sternförmig



Offensichtlich gilt sternförmig $\Longrightarrow$ wegzusammenhängend

Die zentrale Aussage ist nun

d.h. offen & zshgd.

(vi) SATZ. Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und sei v ein $\mathcal{C}^1$ VF auf G. Dann gilt

v ist Gradientenfeld $\Longleftrightarrow$ v erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

FOLIE

Beweisskizze: ($\Longrightarrow$): siehe (i)

($\Longleftarrow$): oBdA ist G sternförmig bzgl $p=0$ [die Integrabbed. ändern sich nicht bei Verschiebung $\tilde{v}(x)=v(x-p)$]

Für $x\in G$ sei $\sigma_x:[0,1]\to G$, $\sigma_x(t)=tx$ die Verbindungsstrecke von 0 nach p

Definiere $\varphi(x) := \int_{\sigma_x} V$ [selbe Idee wie in 2.4(ii)]

$$= \int_0^1 \langle V(tx) | x \rangle \, dt = \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 V_k(tx)\, dt$$

Nun gilt

$$\underbrace{D_j \varphi(x)}_{\text{Produktregel}} = \sum_{k=1}^n \Big(\underbrace{D_j x_k}_{\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}} \int_0^1 V_k(tx)\,dt + x_k \underbrace{D_j \int_0^1 V_k(tx)\,dt}_{\int_0^1 D_j V_k(tx)\,dt} \Big)$$

Diffquot. kann unter das Integral gezogen werden, siehe [Heuser 2, 113.2]

Kettenregel

$$= \int_0^1 V_j(tx)\,dt + \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 t \underbrace{D_j V_k(tx)}_{= D_k V_j(tx)}\,dt$$

Integrabilitätsbed

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{V_j(tx)}_{=: f(t)} + t \underbrace{\langle \operatorname{grad} V_j(tx) | x \rangle}_{f'(t)} \Big)\, dt$$

Trick; $f'(t)$ Kettenregel 3.25(ii) bzw UE 23[8]

$$= \int_0^1 \big(\underbrace{t' f(t) + t f'(t)}_{(t f(t))'} \big)\, dt = \int_0^1 \big(t f(t) \big)'\, dt =$$

HsDI

$$= t f(t) \Big|_0^1 = f(1) - 0 = \underline{V_j(x)}$$

Also gilt $\operatorname{grad} \varphi = V$. $\square$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

(vii) Zusammenfassung der Gesamtsituation: v stetiges VF auf Gebiet G

v Gradientenfeld [dh $v = \operatorname{grad} \varphi$]	$\Longleftrightarrow$	Integrale wegunabh

Integrale wegunabh $\Longrightarrow$ $\boxed{\oint v = 0}$

$v \in \mathcal{C}^1$: v Gradientenfeld $\Longrightarrow$ Integrabilitätsbedingungen

Integrabilitätsbedingungen $\Longrightarrow$ v Gradientenfeld, falls sternförmig

Komponentenweise: fehlt uns noch eine Prozedur zum expliziten Finden einer Stammfkt

2.6 PRAKTISCHE BESTIMMUNG EINER STAMMFKT

Vorgelegt sei ein $\mathcal{C}^1$-VF v auf einem Gebiet G

(i) Ein Flussdiagramm zur Abklärung der Situation

G sternf.? — NEIN → Andere Methode suchen, um zu sehen ob Integrale wegunabh.

JA ↓

Intbed? — NEIN → v hat keine Stammfkt

JA ↓

Stammfkt $\exists$ → Konstruiere Stammfkt hier nur speziell für $n=2$

(ii) Explizite Konstruktion einer Stammfkt für $n=2$

[Details siehe Heuser 2, 183]

$v(x,y)=(v_1(x,y), v_2(x,y))$ erfüllt $D_1 v_2 = D_2 v_1$

1. SCHRITT: Ansatz $\varphi(x,y)=\int v_1(x,y)\,dx + \underbrace{h(y)}$ noch zu finden

D.h. eine Stammfkt; vgl [5] 2.10 (iii)

[dann gilt nämlich $D_1\varphi = v_1$]

2. SCHRITT: d.h. soll sein

$$v_2(x,y) \overset{!}{=} \partial_y \varphi(x,y) = \int \partial_y v_1(x,y)\,dx + h'(y)$$

$$\Longrightarrow h'(y) = v_2(x,y) - \int \partial_y v_1(x,y)\,dx$$

Daraus kann h mittels Integration berechnet werden.

(iii) BSP. $v(x,y)=(3x^2y, x^3)$ $\quad G=\mathbb{R}^2$

G sternförmig ✓

Intbed. $D_2 v_1 = 3x^2 = D_1 v_2$ ✓

Ansatz: $\varphi(x,y) = \int 3x^2y\,dx + h(y) = x^3y + h(y)$

$$v_2 = x^3 \overset{!}{=} \partial_y \varphi = x^3 + h'(y) \Longrightarrow h'(y)=0$$

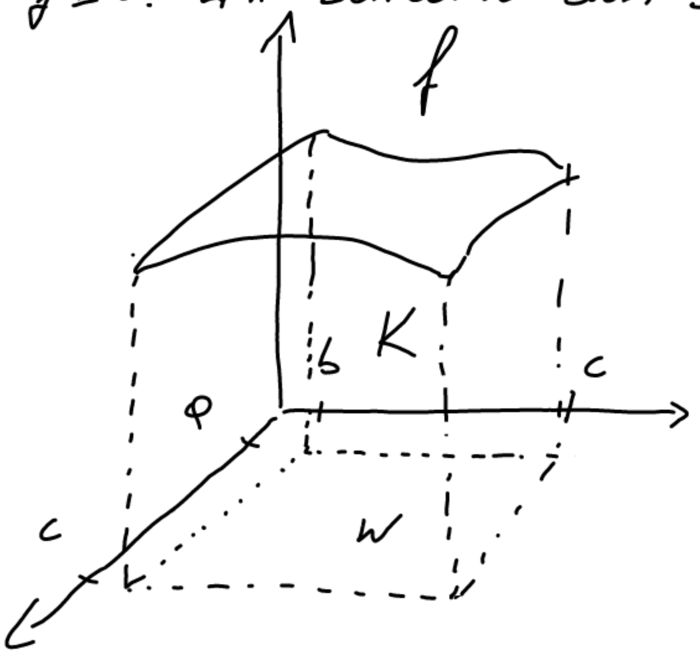
wähle $h(y)=0$ und somit $\varphi(x,y)=x^3y$

Probe: $\operatorname{grad}\varphi = (3x^2y, x^3)$ ✓

§3 Mehrfache Integrale

3.1 Grundidee (Volumen unter dem Graphen einer Fkt)

Sei $W = [a,b] \times [c,d]$ ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ und $f: W \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$. Wir betrachten den 3-D Bereich

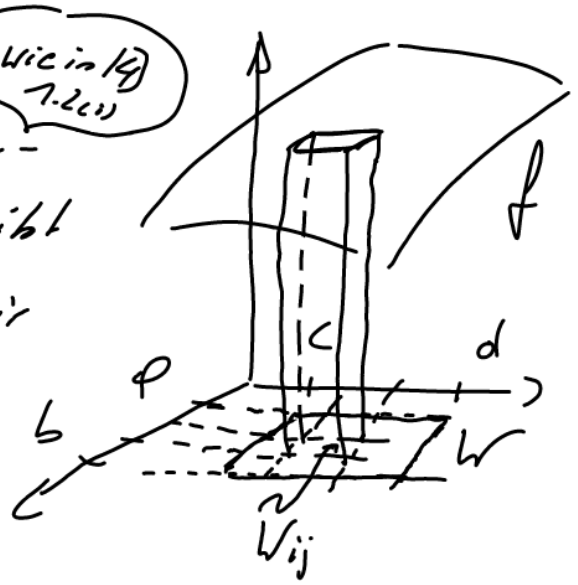


$$K := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in W,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

zwischen $(x$-$y)$-Ebene und der „Fläche" $z = f(x,y)$ also dem Graphen von f und wollen sein Volumen berechnen.

Eine Möglichkeit das Volumen $\mathrm{Vol}(K)$ von K näherungsweise zu berechnen besteht darin, Summen von Quadervolumina über kleinen Teilrechtecken von W zu bilden. Genauer seien Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$, $[c,d]$ dann ergibt sich eine Zerlegung W_{ij} von W und wir definieren

wie in [K] 7.2(ii)



$$m_{ij} := \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in W_{ij}\}$$
$$M_{ij} := \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in W_{ij}\}.$$

Dann gilt sicherlich

$$\underbrace{\sum_{i,j} m_{ij} \cdot \text{Fläche } W_{ij}}_{\text{Untersumme}} \leq \mathrm{Vol}(K) \leq \underbrace{\sum_{i,j} M_{ij} \cdot \text{Fläche } W_{ij}}_{\text{Obersumme}}$$

Jetzt offiziell

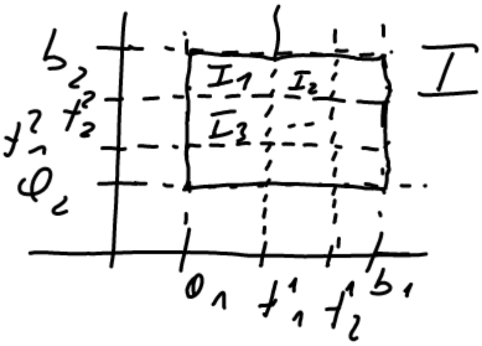
3.2 INTEGRAL ÜBER n-DIM INTERVALLE

(i) Seien $a_\ell \le b_\ell$ $1 \le \ell \le n$, dann heißt $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kompaktes <u>n-dim Intervall</u>.

$|I| := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ heißt <u>Inhalt</u> von I

[$n=2$ ... Rechteck, $n=3$ ... Quader, ...]

(ii) Eine <u>Zerlegung</u> von I ist definiert als ein Produkt $Z_1 \times \dots \times Z_n$ wobei Z_j eine Zerlegung von $[a_j, b_j]$ in Teilintervalle gemäß [1] 1.2(i) ist, d.h.
$Z_j = \{a_j = t_0^j < t_1^j < \dots < t_n^j = b_j\}$.



Um die Notation übersichtlich zu halten, nummerieren wir die entstehenden n-dim Teilintervalle I_k beliebig, sodass

$$\boxed{I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k}$$

Beachte, dass die n-dim Teilintervalle I_k und I_ℓ höchstens Ränder gemeinsam haben

(iii) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Fkt. Wir setzen

$$m_k := \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}, \quad M_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$$

und bezeichnen

$$U(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{N} m_k |I_k|$$ Untersumme und

$$O(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k|$$ Obersumme von f bzgl $\mathcal{Z}$

(iv) Wir definieren Ober- & Unterintegral von f über I als

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{I*} f(x)\,dx &= \sup_{\mathcal{Z}} U(f,\mathcal{Z}) \\ \int_I^* f(x)\,dx &= \inf_{\mathcal{Z}} O(f,\mathcal{Z}) \end{aligned}}$$

Kurzschreibweise

Offensichtlich gilt $\int_{I*} f\,dx \le \int_I^* f\,dx$

(v) Ein beschränktes f heißt integrierbar, falls $\int_{I*} f\,dx = \int_I^* f\,dx$ gilt und definieren das Integral von f über I als

$$\int_I f(x)\,dx := \int_{I*} f(x)\,dx \left[= \int_I^* f(x)\,dx \right]$$

Schreibweise $\int_I f = \int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_n)$

3.3 INTBARE FKT & EIGENSCHAFTEN DES INT

Sei I ein kp n-dim Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt

NICHT VORGETRAGEN

(i) Folgende Charakterisierung intbarer Fkt ist nicht schwer zu beweisen

$$f \text{ intbar auf } \underline{I} \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ Zerlegung } \mathcal{Z} \text{ von } I \\ \text{mit } O(f,\mathcal{Z}) - U(f,\mathcal{Z}) < \varepsilon \end{array}$$

(ii) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f intbar auf I.

(iii) Eigenschaften des Integrals (Beweise alle nicht schwer)

- Linearität: Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ intbar $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f+g \text{ ist intbar } \& \int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$
$$\lambda f \text{ ist intbar } \& \int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$$

- Monotonie: Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ intbar mit $f \le g$ dann gilt

$$\int_I f\,dx \le \int_I g\,dx$$

Insbesondere gilt

$$f \ge 0 \Rightarrow \int_I f \ge 0$$
$$|f| \le M \Rightarrow \int_I f \le M|I|$$

3.4. ITERIERTE INTEGRALE & DER SATZ V. FUBINI

(i) Fragestellung: Sei $J = [a,b]$, $K = [c,d]$ und $I = J \times K$ und $f: I \to \mathbb{R}$ intbar.

Wie können wir $\int_I f$ konkret ausrechnen?

(ii) Die Idee: Zurückführen auf nacheinander ausgeführte 1-d Integrale