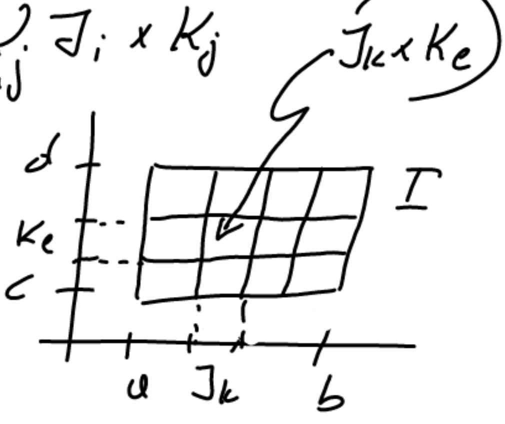
Seien $J=\bigcup_{i=1}^{M} J_i$ und $K=\bigcup_{j=1}^{N} K_j$ Zerlegungen in Teilintervalle. Dann ist $I=\bigcup_{i,j} J_i \times K_j$



Wir sehen

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y)\in J_i \times K_j\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y)\in J_i \times K_j\}$$

Dann gilt

$$\forall (x,y)\in J_i\times K_j: \qquad m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$$

$$\xRightarrow[\text{bzgl } x]{\text{Int über } J_i} \quad m_{ij}\,|J_i| \le \int_{*\,J_i} f(x,y)\,dx \le \int^{*}_{J_i} f(x,y)\,dy \le M_{ij}\,|J_i|$$

$$\xRightarrow{J=\bigcup J_i} \quad \sum_i m_{ij}\,|J_i| \le \sum_i \int_{*\,J_i} f(x,y)\,dx = \underbrace{\int_{*\,J} f(x,y)\,dx}_{=:F(y)}$$

und

$$G(y) := \int^{*}_{J} f(x,y)\,dx \le \sum_i M_{ij}\,|J_i|$$

$$\xRightarrow[\text{bzgl } y]{\text{Int über } K_j} \quad \sum_i m_{ij}\,\overbrace{|J_i|\,|K_j|}^{|J_i\times K_j|} \le \int_{*\,K_j}\Big(\overbrace{\int_{*\,J} f(x,y)\,dx}^{F(y)}\Big)dy$$

und

$$\int^{*}_{K_j}\Big(\overbrace{\int^{*}_{J} f(x,y)\,dx}^{G(y)}\Big)dy \le \sum_i M_{ij}\,\overbrace{|J_i|\,|K_j|}^{|J_i\times K_j|}$$

$$\xRightarrow[\text{über } j]{\text{Summation}} \quad \underbrace{\sum_{i,j} m_{ij}\,|J_i\times K_j|}_{=U(f,Z)} \le \int_{*\,K}\Big(\int_{*\,J} f(x,y)\,dx\Big)dy \le \int^{*}_{K}\Big(\int^{*}_{J} f(x,y)\,dx\Big)dy \le \underbrace{\sum_{i,j} M_{ij}\,|J_i\times K_j|}$$

$$\Big\downarrow \text{sup über } Z \qquad \int_{*\,J\times K} f(x,y)\,d(x,y) \overset{f \text{ intb}}{=\!=} \int^{*}_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) \xleftarrow[\inf_Z]{} O(f,Z)$$

Daraus ergibt sich mit einigen Zusatzüberlegungen [oB]

$$\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_K \Big(\int_J f(x,y)\,dx\Big)\,dy$$

analog $= \int_J \Big(\int_K f(x,y)\,dy\Big)\,dx$

(iii) Allgemeiner gilt im $\mathbb{R}^n$ der SATZ v. FUBINI:

Sei J ein m-dim kp Intervall, K ein n-dim kp Intervall und sei $f: J\times K \to \mathbb{R}$ intbar. Dann gilt

$$\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_J\Big(\int_K f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_K\Big(\int_J f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

(iv) Daraus ergibt sich für $I = [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ und f intbar $I\to\mathbb{R}$

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n,$$

wobei die Reihenfolge der 1-d Integrale beliebig geändert werden darf.

(v) BSP. $I = [0,1]^3$, $f: I\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$

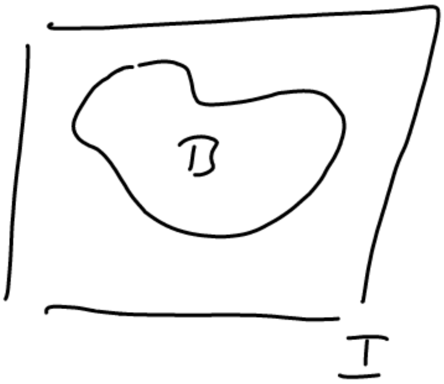
$$\int_I f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\;dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 yz\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 yz\,dy\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 z\,dz = \Big(\frac{1}{2}\Big)^3 = \underline{\underline{1/8}}$$

3.5 Integrale über allgemeine Bereiche

(i) Motivation: Weder für die Praxis noch die Theorie ist es ausreichend Funktionen nur über n-dim Intervalle zu integrieren. Wir werden nun unseren Integralbegriff auf allgemeinere Teilmengen $B\subseteq\mathbb{R}^n$ erweitern.

(ii) Sei $B\subseteq\mathbb{R}^n$ beschränkt [d.h. $\exists R: B\subseteq B_R(0)$ vgl. [6] §1], dann gibt es sicherlich ein n-dim Intervall I mit $B\subseteq I$. Für $f: B\to\mathbb{R}$ definieren wir



$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & x\in B\\ 0 & x\notin B\end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $f_B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ beschr. $\Leftrightarrow$ f beschränkt.

Wir sagen f sei auf B integrierbar, falls f_B auf I intbar ist.

Es ist leicht zu sehen, dass dies nicht von der Wahl von I abhängt. Daher definieren wir weiters

$$\int_B f(x)\,dx = \int_I f_B(x)\,dx.$$

(iii) Die Rolle von B. Ob eine Fkt f über B intbar ist hängt sowohl von f als auch von B ab! Klarerweise ist man nur an solchen Bereichen B interessiert, auf denen die Fkt 1 bzw die charakteristische Fkt χ_B intbar ist. Dazu darf B nicht zu stark „zerfranst“ sein, vgl. [4] 1.9(ii): $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht intbar.

Wir geben den Mengen unseres Interesses einen Namen

(iv) DEF. Eine nichtleere, beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt JORDAN-MESSBAR, falls 1 intbar auf B ist [oder was dasselbe ist χ_B intbar ist]

Kurz: messbar

In diesem Fall nennen wir

$$|B| := \int_B 1$$

der (Jordan-)Inhalt von B.

Im Fall $n=2$ auch (Jordan)-Fläche

$n=3$ (Jordan)-Volumen

(v) Wie häßlich kann B sein?

Eine Antwort liefert [Heuser 2, 201.2]: Der Rand von B darf nicht zu lang/groß werden.

Genauer: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gilt

B (Jordan-)messbar

$\Longleftrightarrow$ ∂B ist eine (Jordan-)Nullmenge

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ endlich viele n-dim kp Intervalle $I_1, \dots, I_m$ mit $\partial B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ und $\sum_{j=1}^{m} |I_j| < \varepsilon$

Rand von B

$x \in \partial B$ $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Umgebung U von x: $U \cap B \neq \emptyset \wedge U \cap B^c \neq \emptyset$

∂B

kleiner Inhalt

(vi) Eigenschaften des Integrals (die üblichen Verdächtigen)

Sei B J-messbar, $f,g: B \to \mathbb{R}$ intbar, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- Linearität: $f+g$, λf intbar und

$$\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g, \quad \int_B (\lambda f) = \lambda \int_B f$$

- Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$

insbes $$\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f|$$

- MWS-S: Falls $\exists\, m, M$: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in B$

$\Longrightarrow$ $$m\,|B| \leq \int_B f \leq M\,|B|$$

- A messbar, $A \cap B = \emptyset$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ intbar auf A & B

$\Longrightarrow$ $$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$ und speziell mit $f=1$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Sei B kp & messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f intbar auf B

- Parameterintegral: $f: [a,b] \times B \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere φ als sog. Parameterintegral: $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) := \int_B f(t,x)\,dx$$

[Heuser, 201.13]

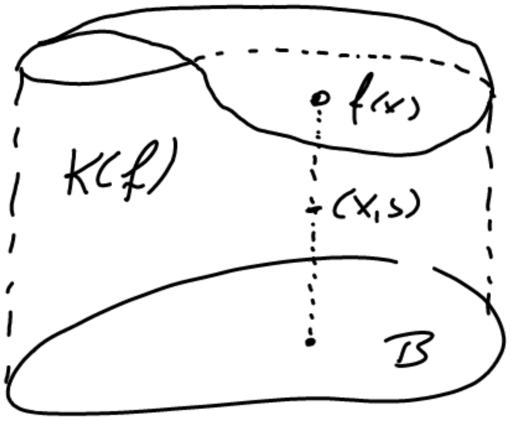
SEHR WICHTIGES KONZEPT

$\Rightarrow \varphi$ stetig.

Falls $\partial_t f$ stetig $\Rightarrow \varphi$ diffbar mit $\varphi'(t) = \int_B \partial_t f(t,x)\,dx$

3.6 INHALT UNTER DEM GRAPHEN EINER FKT

(i) Die Fragestellung: Sei $B\subseteq\mathbb{R}^n$ messbar und $f:B\to\mathbb{R}$ integrierbar mit $f\geq 0$.



Wir betrachten die „Menge unter dem Graphen" die sog. Ordinatenmenge von f:

$$K(f):=\{(x,s)\in B\times\mathbb{R} \mid 0\le s\le f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

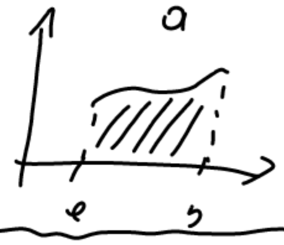
Man kann zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen $K(f)$ messbar ist [Heuser 2. 203.1]. Darüberhinaus gilt

(ii) SATZ

$$|K(f)|=\int_B f$$

Spezialfall $n=1$
$B=[a,b]$

$$|K(f)|=\int_a^b f(x)\,dx$$



Beweis. f int'bar $\Rightarrow$ f beschränkt

$\Rightarrow \exists C\geq 0:\ 0\le f(x)\le C\ \forall x\in B$

B messbar $\Rightarrow$ B beschränkt $\Rightarrow \exists$ n-dim kp Intervall I mit $B\subseteq I$

$\Rightarrow K(f)\subseteq I\times[0,C]=:J$ $(n+1)$-dim kp Intervall

Wir können rechnen

$$|K(f)|=\int_{K(f)}1\,d(x,s)=\int_J \chi_{K(f)}\,d(x,s)\overset{\text{[Fubini]}}{=}\int_I\Big(\int_0^C\chi_{K(f)}(x,s)\,ds\Big)\,dx. \qquad (*)$$

nicht vorgetragen

Für $x \in I \setminus B$ gilt $\chi_{K(f)}(x,s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$f_B(x) = 0$$

Für $x \in B$ ist $\chi_{K(f)}(x,s) = \begin{cases} 1 & 0 \le s \le f(x) \ [\iff s \in [0, f(x)]] \\ 0 & s \notin [0, f(x)] \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^c \chi_{K(f)}(x,s)\,ds = \int_0^{f_B(x)} 1\,ds \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \underline{|K(f)|} \overset{(*)}{=} \int_I \Big(\int_0^{f_B(x)} 1\,ds \Big) dx = \int_I f_B(x) = \underline{\int_B f(x)\,dx} \qquad \square$$

(iii) Bsp (Kreisscheibe) $B = [-r, r]$, $r > 0$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

K(f) ... Halbkreisscheibe vom Radius r

$$|K(f)| = \int_B \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} \text{subst} \\ x = r\sin(t) \end{bmatrix} \text{; siehe 14, 2.17 (iii)}$$

$$= r^2 \pi/2$$

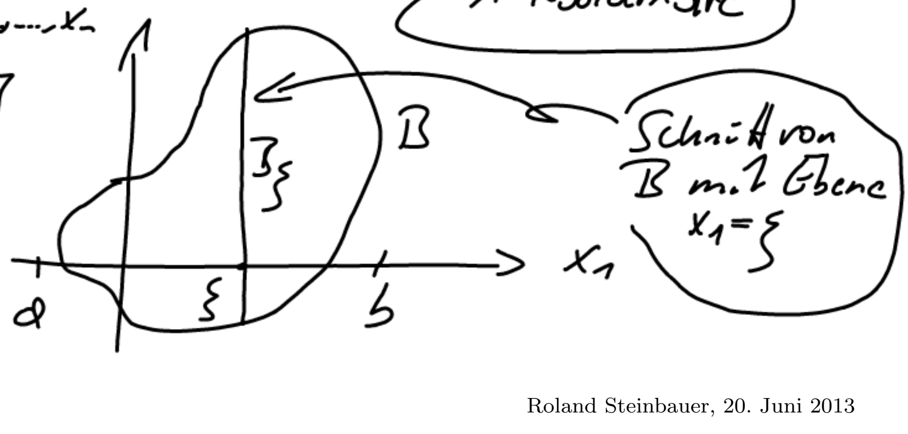
3.7 Das Prinzip von Cavalieri

(i) Die Idee: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ gelte $a \le x_1 \le b$ ← Einschränkung in 1. Koordinate

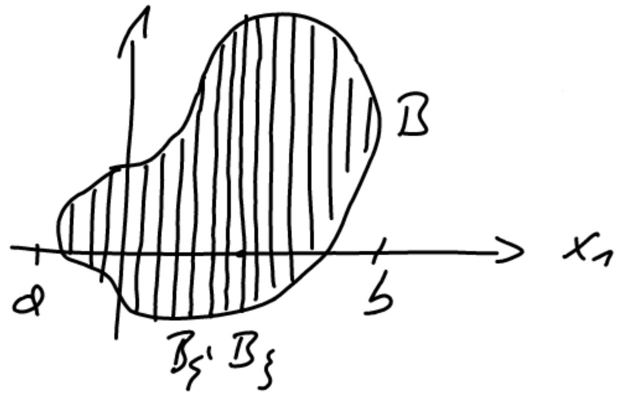
Bezeichne für $\xi \in [a,b]$

$B_\xi := \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (\xi, x_2, \dots, x_n) \in B\}$

und $q(\xi) := |B_\xi|$



Die Idee des Prinzips von Cavalieri ist es nun den Inhalt von B mittels „Salamitaktik" zu berechnen indem alle $\rho(\xi)$ „aufsummiert" d.h. aufintegriert werden.



„Genauer gilt der folgende

(ii) **SATZ:** $\boxed{|B| = \int_a^b \rho(\xi)\,d\xi}$

Beweis [ähnliche Idee wie 3.6(ii)]

Sei J ein $(n-1)$ dim kp Intervall sodass $B \subseteq [a,b]\times J$, dann gilt

$$|B| = \int_B 1\,dx = \int_{[a,b]\times J} \chi_B(x)\,dx \overset{[\text{Fubini}]}{=} \int_a^b \Big(\int_J \chi_B(\xi, x_2,\dots,x_n)\,d(x_2,\dots,x_n)\Big)\,d\xi. \qquad (*)$$

Es gilt

$$\chi_B(\xi, x_2,\dots,x_n) = \begin{cases} 0 & (x_2,\dots,x_n) \notin B_\xi \\ 1 & (x_2,\dots,x_n) \in B_\xi \end{cases} = \chi_{B_\xi}(x_2,\dots,x_n) \qquad (**)$$

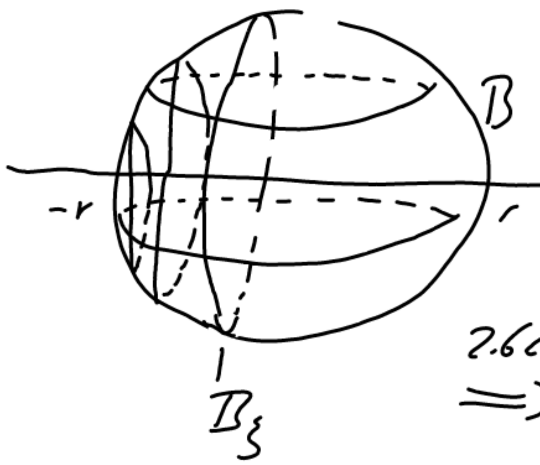
und daher

$$|B| \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \int_a^b \Big(\underbrace{\int_J \chi_{B_\xi}(x_2,\dots,x_n)\,d(x_2,\dots,x_n)}_{= \int_{B_\xi} 1\,d(x_2,\dots,x_n) = |B_\xi| = \rho(\xi)}\Big)\,d\xi = \int_a^b \rho(\xi)\,d\xi$$

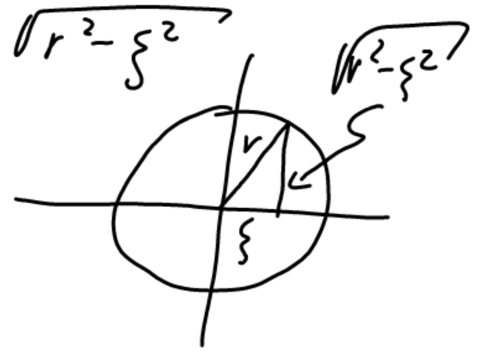
$\square$

(iii) Bsp (Kugel) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \le r\}$ $(r>0)$

Kugel vom Radius r



Für $-r \le \xi < r$ ist B_ξ eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2-\xi^2}$



$$\overset{2.6(iii)}{\Longrightarrow} |B_\xi| = \varphi(\xi) = (r^2-\xi^2)\pi$$

$$\Longrightarrow |B| \overset{(ii)}{=} \int_{-r}^{r} (r^2-\xi^2)\pi \, d\xi = \pi\left(r^2\xi - \frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{\xi=-r}^{\xi=r}$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

3.8 Integration über Normalbereiche

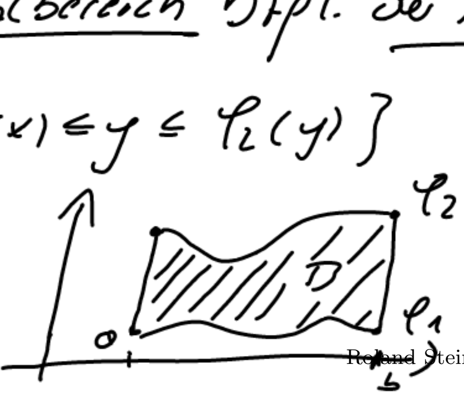
(i) Fragestellung & Def. Wir stellen eine weitere Methode vor, Funktionen über „schöne" Flächen zu integrieren; eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen kann problemlos bewerkstelligt werden.

bzgl. einer Koordinate durch Geraden begrenzt

WEGGELASSEN

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bzgl. der x-Achse, falls $B = \{(x,y) \,/\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(y)\}$

wobei $a,b \in \mathbb{R}$, $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Fkt sind

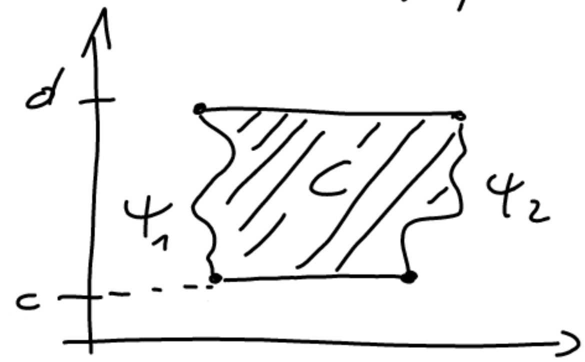


Analog dazu heißt $C\subseteq\mathbb{R}^2$ Normalbereich bzgl der y-Achse, falls

$$C=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

mit $c,d\in\mathbb{R}$ und

$\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig



Die Integration über Normalbereiche kann nun mittels derselben Ideen wie in 3.6, 3.7 bewerkstelligt werden.

(ii) SATZ Sei B [C] ein Normalbereich bzgl. der x-[y-] Achse und sei $f: B\to\mathbb{R}$ bzw $f: C\to\mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y)=\int_a^b\Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx \qquad \text{bzw}$$

$$\int_C f(x,y)\,d(x,y)=\int_c^d\Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\Big)dy$$

WEGGELASSEN

Beweis. Wir behandeln nur den 1. Fall, der 2. ist analog.

Setze $m:=\min\varphi_1$, $M=\max\varphi_2$ [$\exists$ weil f stetig auf $[a,b]$]

$\underline{I}:=[a,b]\times[m,M]$

Es gilt

$$\int_B f=\int_I f_B\,d(x,y)\overset{\text{Fubini}}{=}\int_a^b\Big(\int_m^M f_B(x,y)\,dy\Big)dx. \qquad (*)$$

Für $x\in[a,b]$ fix gilt:

$$f_B(x,y)=\begin{cases}0 & y\notin[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\\ f(x,y) & y\in[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]\end{cases}$$

Daher $\int_B f \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(y,x)\,dy \right) dx.$ $\square$

(iii) Eine einfache Folgerung aus (ii) ist

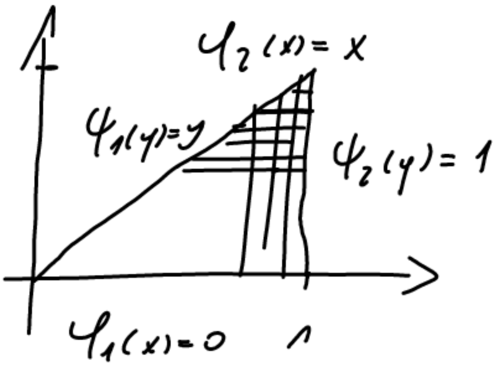
Ja, das gibt es siehe Bsp (iv)

<u>KOR</u>. Sei A NB bzgl x- und y-Achse, dann gilt

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)\,dx \right) dy$$

WEGLASSEN

(iv) <u>BSP</u>. Sei A wie folgt, f stetig auf A.

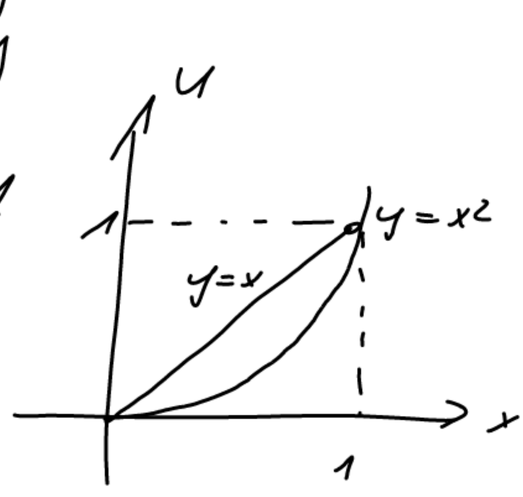


Dann ist A NB bzgl x- & y-Achse und daher

$$\int_A f = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

(v) <u>Ein explizites Bsp</u>

$f(x,y) = xy$ und B der Bereich im 1. Quadranten zwischen den Fkt $y = x$ und $y = x^2$



• B ist NB bzgl der x-Achse mit $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, $x \in [0,1]$ und daher

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x} dx =$$

WEGGELASSEN

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - x^5)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

• B ist auch NB bzgl y-Achse mit $\psi_1(y) = y$, $\psi_2(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0,1]$ und es ergibt sich

Zum Spaß Check andersrum

$$\int_B xy\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} xy\, dx\right) dy = \int_0^1 y \frac{x^2}{2}\Big|_y^{\sqrt{y}}\, dy$$

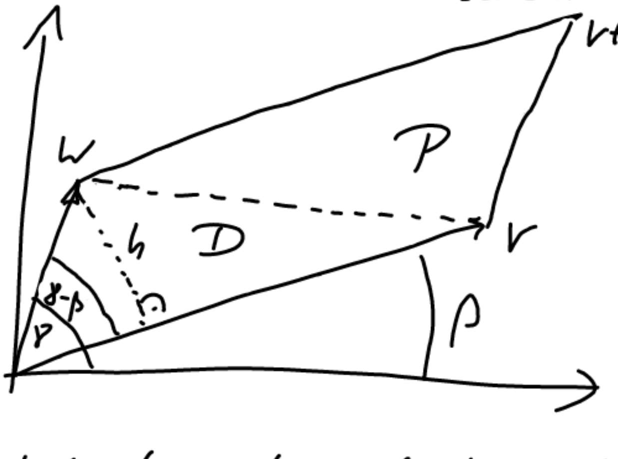
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2 - y^3)\,dy = \frac{1}{2}\left(y^3/3 - y^4/4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

3.9 Substitutionsregel für Mehrfachintegrale

AUF FOLIE

(i) Problemstellung: Ein wesentliches Werkzeug der 1-d Integralrechnung ist die Substitutionsmethode. Auch die mehrdim Integralrechnung kommt nicht ohne eine analoge Methode aus; diese werden wir hier kennenlernen.

(ii) Vorgeplänkel: Die Fläche eines Parallelogramms ist durch die Determinante gegeben.



Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$;

P das Parallelogramm $0, v, v+w, w$

D das Dreieck $0, v, w$

Es gilt $|P| = 2|D|$

Wir berechnen $|P|$ explizit. Zunächst schreiben wir

$v_1 = \|v\| \cos(\beta)$, $v_2 = \|v\| \sin(\beta)$

$w_1 = \|w\| \cos(\gamma)$, $w_2 = \|w\| \sin(\gamma)$

$h = \|w\| \sin(\gamma - \beta)$

Damit gilt

$$|P| = 2|D| = \|v\|\, h = \|v\|\,\|w\| \sin(\gamma-\beta)$$

$$= \|v\|\,\|w\| \big(\sin(\gamma)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\gamma)\big)$$

$$= v_1 w_2 - v_2 w_1 = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

| | benötigt falls $\gamma < \beta$

also $\boxed{|P| = |\det(v,w)|}$

n-dim Parallelogramme

Ähnlich ergibt sich für Parallelepipede im $\mathbb{R}^n$

$|P| = \det(v_1, \dots, v_n)$

(iii) Heuristik. Wie verändert sich das Volumen unter einer Koordinatentransformation?

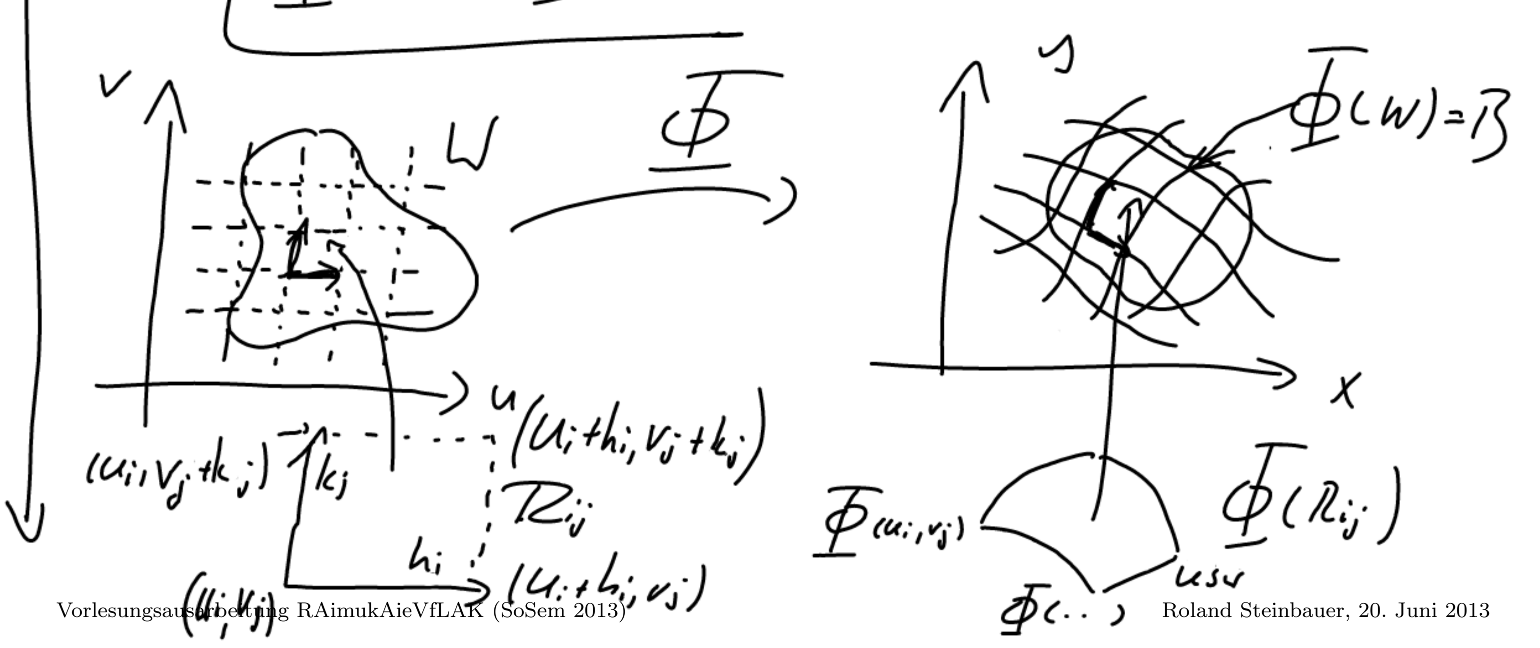
AUF FOLIE

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ intbar. In

$\int_B f(x,y)\, d(x,y)$ substituieren wir $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$

wobei $\underline{\Phi}(u,v) := \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix}$ eine inj. $\mathcal{C}^1$ Abb

$\underline{\Phi}: W \to B$ ist mit $W \subseteq \mathbb{R}^2$



Auf Folie

Betrachten wir eines der kleinen Rechtecke in W

$$R_{ij} \;\text{----}\; \begin{pmatrix}u_i\\v_j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_i+h_i\\v_j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_i+h_j\\v_j+k_j\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u_i\\v_j+k_j\end{pmatrix}$$

Dieses wird von Φ auf ein „krummes Parallelogramm" abgebildet

$$\Phi(R_{ij}) \;\text{---}\; \Phi\begin{pmatrix}u_i\\v_j\end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix}u_i+h_i\\v_j\end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix}u_i+h_i\\v_j+k_j\end{pmatrix}, \Phi\begin{pmatrix}u_i\\v_j+k_j\end{pmatrix}$$

Wäre dieses ein „echtes Parallelogramm" so wäre seine Fläche $\det(\tilde{v},\tilde{w})$ mit

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix}\varphi(u_i+h_i,v_j)-\varphi(u_i,v_j)\\ \psi(u_i+h_i,v_j)-\psi(u_i,v_j)\end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix}\varphi(u_i,v_j+k_j)-\varphi(u_i,v_j)\\ \psi(u_i,v_j+k_j)-\psi(u_i,v_j)\end{pmatrix}$$

Für kleine h_i, k_j ist lt. MWS

$$\tilde{v} \approx \begin{pmatrix}\partial_u\varphi(u_i,v_j)\cdot h_i\\ \partial_u\psi(u_i,v_j)\cdot h_i\end{pmatrix} = h_i\,\partial_u\Phi(u_i,v_j)$$

$$\tilde{w} \approx \begin{pmatrix}\partial_v\varphi(u_i,v_j)\,k_j\\ \partial_v\psi(u_i,v_j)\,k_j\end{pmatrix} = k_j\,\partial_v\Phi(u_i,v_j)$$

Jacobi Matrix

und daher

$$|\Phi(R_{ij})| \approx |\det(\tilde{v},\tilde{w})| = |\det D\Phi(u_i,v_j)|\,|h_i k_j| = |\det D\Phi(u_i,v_j)|\,|R_{ij}|$$

AUF FOLIE

Mit diesen Heuristik ergibt sich

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) \approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i,v_j),\psi(u_i,v_j))\,|\det D\Phi(u_i,v_j)|\,|R_{ij}|$$

$$\Big\downarrow \; h_i,k_j \to 0, \text{ d.h. } |R_{ij}| \to 0$$

$$\int_V f(\Phi(u,v))\,|\det D\Phi(u,v)|\,d(u,v)$$

Das Integral transformiert also mit dem Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation.

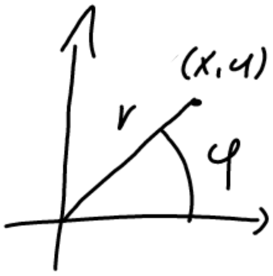
Ein strenger Beweis dieser Aussage ist sehr aufwendig [siehe [Heuser 2, §205]. Wir halten hier das Resultat explizit fest.

(iv) THM (Substitutionsregel) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Fkt mit $\det D\Phi(u) \neq 0 \ \forall u \in U$. Für $K \subseteq U$ kp & messbar und $f: \Phi(K) \to \mathbb{R}$ stetig gilt dann

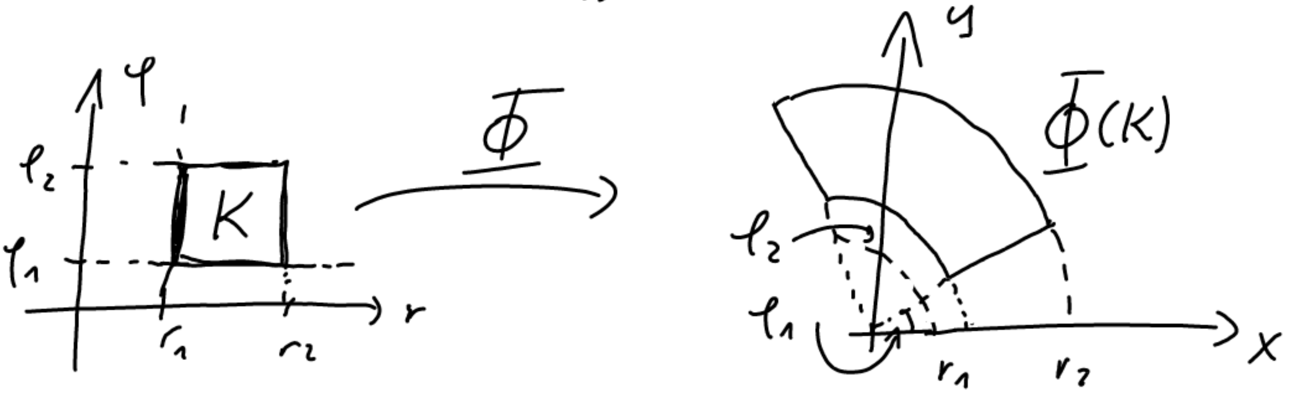
$$\int_{\Phi(K)} f(x)\,dx = \int_K f(\Phi(u))\,|\det D\Phi(u)|\,du$$

Die Aussage gilt auch noch falls die Voraussetzungen an Φ auf einer J-Nullmenge verletzt sind (*)

(vi) BSP (Polarkoordinaten) $\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$



$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $\det D\Phi(r,\varphi) = r$



[6] 4.5(vi) $\Rightarrow$ Φ Diffeo in einer Umgebung jedes Pkts (r,φ), $r>0$

UE 24[5] $\Rightarrow$ Φ injektiv $U := \{(r,\varphi) \mid r>0,\ 0<\varphi<2\pi\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

AUF FOLIE

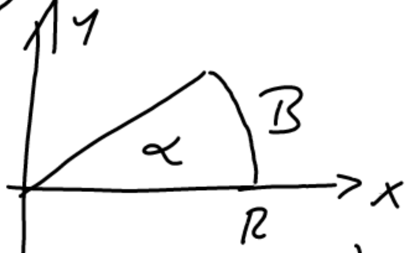
Daher gilt für jedes Rechteck $K = \{(r,\varphi) \mid r_1 \le r \le r_2,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$ mit $0<r$, $0<\varphi_1$, $\varphi_2 < 2\pi$ und allgemeiner für jede kp. messbare Menge $M \subseteq U$ [Heuser 2, §208]

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Phi(K)} f(x,y)\, d(x,y) &= \int_K f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, r\, d(r,\varphi) \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\, r\, dr\, d\varphi . \end{aligned} \right\}$$

nur für K Rechtecke

Reihenfolge egal

z.B. Kreissektor mit Winkel α, Radius R

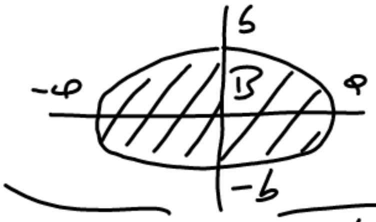


$B = \Phi(K)$ mit $K = [0,R] \times [0,\alpha]$ (beachte $(*)$ in (iv))

$$|B| = \int_{\Phi(K)} 1\, d(x,y) = \int_K r\, d(r,\varphi) = \int_0^\alpha \int_0^R r\, dr\, d\varphi = \int_0^\alpha \frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\varphi = \frac{R^2}{2} \int_0^\alpha d\varphi = \frac{R^2}{2}\alpha$$

(vi) Bsp (Ellipsenfläche) $B = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ $a > b > 0$

Setze $\Phi(r,\varphi) = r \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \end{pmatrix}$



$B = \Phi([0,1] \times [0,2\pi])$ (beachte ∞ in (iv))

elliptische Koordinaten
alles völlig analog zu (v)

$|B| = \int_B 1 \, d(x,y)$

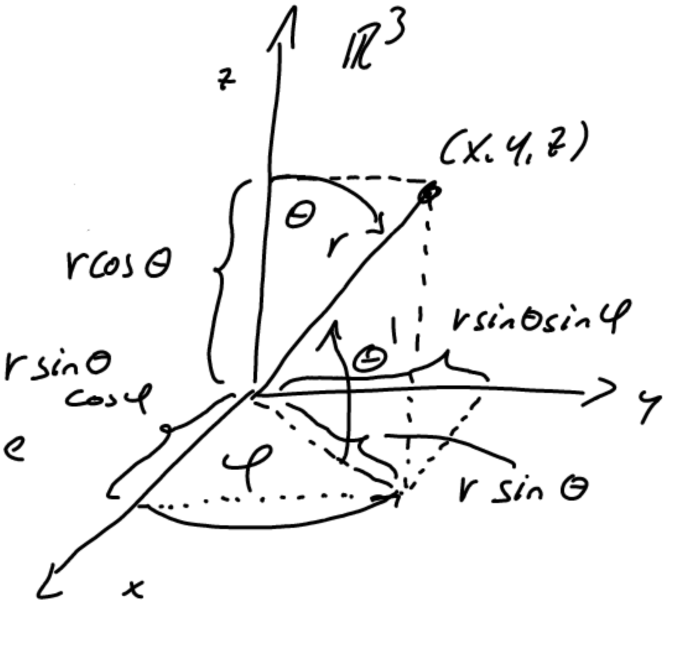
$= \int_{\Phi(B)} |\det D\Phi(r,\varphi)| \, d(r,\varphi)$ $\qquad \det D\Phi(r,\varphi) = abr$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr \, dr \, d\varphi = ab \frac{1}{2} 2\pi = \underline{\underline{ab\pi}}$ $\qquad$ [Kreis: $a = b = r$ $\Rightarrow |B| = r^2\pi$]

AUF FOLIE

(vii) Bsp (Kugelkoordinaten)

$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$



ACHTUNG: Es gibt auch eine andere Konvention mit θ' statt θ [Heuser]; wir verwenden die [Forster]-Konvention vgl. auch UE 24/6

UE 24/6 $\Rightarrow \det D\Phi(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta$ und Φ ist injektiv auf $U = (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$.

Daher gilt für jedes Rechteck $K = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ mit $0 < r_1 < r_2$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ bzw. allgemein für $K \subseteq U$ kp & messbar

AUF FOLIE

$$\int_{\Phi(K)} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_K f(r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\sin\theta,\, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, d(r,\varphi,\theta)$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(\dots)\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

nur falls Rechteck

Reihenfolge egal

z.B. KUGELVOLUMEN

$$B = K_R(0) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \quad R>0$$
$$= \Phi\big([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\big)$$

(beachte (*) in (iv))

$$|B| = \int_B 1\, d(x,y,z)$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{R} r^2\, dr$$
$$= 2\pi\, \underbrace{(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}}_{2}\, \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}R^3$$