Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Sommersemester 2013

1. Prüfungstermin (28.6.2013)

Gruppe A

1. *Funktionenfolgen.*
   (a) Definiere die Begriffe punktweise und gleichmäßige Konvergenz für eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $A \subseteq \mathbb{R}$. Welcher der beiden Begriffe ist stärker? Gib ein Argument bzw. ein Gegenbeispiel an. (4 Punkte)
   (b) Unter welchen Umständen vertauschen Limes und Integral einer Funktionenfolge. Formuliere das einschlägige Resultat exakt und beweise es. Begründe jeden deiner Beweisschritte. (3 Punkte)

2. *Potenz- und Taylor-Reihen.*
   (a) Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ mit c_k, $z_0 \in \mathbb{C}$ definiere den Begriff des Konvergenzradius R. (1 Punkt)
   (b) Diskutiere das Konvergenzverhalten von Potenzreihen mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. (Wo konvergiert die Reihe, wo konvergiert sie gleichmäßig und wo divergiert sie? Kann man in allen Punkten eine definitive Aussage über Konvergenz bzw. Divergenz treffen?) (3 Punkte)
   (c) Für eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I gib das Taylor-Polynom $T_n[f, x_0]$ der Ordnung n mit Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ und eine Form des Restglieds R_{n+1} an. Unter welchen Umständen konvergiert die Taylorreihe $T[f, x_0]$ gegen f? (2 Punkte)

3. *Topologie des $\mathbb{R}^n$.*
   (a) Für $a \in \mathbb{R}^n$ definiere den Begriff einer Umgebung von a.
   Definiere den Begriff einer offenene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und fertige eine Skizze an, die die definierende Eigenschaft veranschaulicht. (2 Punkte)
   (b) Zeige: Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
   Gilt diese Aussage auch für beliebige Durchschnitte (d.h. Durchschnitte beliebig vieler offener Mengen)? Erweitere deinen obigen Beweis oder gib ein explizites Gegenbeispiel an. (3 Punkte)
   (c) Zeige: Für jede Folge $(x^{(k)})_k$ in der abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die (in $\mathbb{R}^n$) konvergiert gilt, dass $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ in A liegt. Fertige eine Skizze an, die den Beweisverlauf illustriert. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Differentialrechnung.*
   Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^m$.
   (a) Definiere den Begriff der Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $\xi \in G$. (2 Punkte)
   (b) Diskutiere für die Funktion f die Beziehung zwischen den Begriffen $\mathcal{C}^1$, Differenzierbarkeit, partieller Differenzierbarkeit und Setigkeit. Fertige dazu eine Skizze an, die alle einschlägigen (Nicht-)Implikationen enthält und begründe diese kurz. (3 Punkte)

5. *Integralrechnung.*
   (a) Definiere die Begriffe Gradientenfeld und Integrabilitätsbedingungen. (2 Pkte)
   (b) Zeige, dass jedes stetig differenzierbare Gradientenfeld die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. (2 Punkte)

6. *Rechenaufgaben.*
   (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Funktion (2 Punkte)
   $$f(x,y) = \Big(xe^y, x^2 + y^3, \sin(xy)\Big).$$
   (b) Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y) = 2e^{xy^2}$ im Punkt $(1,1)$ in Richtung zum Ursprung $(0,0)$. (2 Punkte)
   (c) Für $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $(t \in [0, 2\pi])$ und $v(x,y) = (x,y)$ berechne das Wegintegral $\int_\gamma v$. (2 Punkte)

7. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)
   (a) Für jede $\mathcal{C}^\infty$-Funktion f auf einem Intervall $(-a, a)$ gilt: Falls die Taylor-Reihe $T[f, 0]$ überhaupt konvergiert, dann schon gegen die Funktion f selbst.
   (b) Es gibt keine Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Sommersemester 2013

1. Prüfungstermin (28.6.2013)

Gruppe B

1. *Potenz- und Taylor-Reihen.*
   (a) Für eine Potenzreihe
   $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$
   mit c_k, $z_0 \in \mathbb{C}$ definiere den Begriff des Konvergenzradius R. (1 Punkt)

   (b) Diskutiere das Konvergenzverhalten von Potenzreihen mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. (Wo konvergiert die Reihe, wo konvergiert sie gleichmäßig und wo divergiert sie? Kann man in allen Punkten eine definitive Aussage über Konvergenz bzw. Divergenz treffen?) (3 Punkte)

   (c) Für eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I gib das Taylor-Polynom $T_n[f, x_0]$ der Ordnung n mit Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ und eine Form des Restglieds R_{n+1} an. Unter welchen Umständen konvergiert die Taylorreihe $T[f, x_0]$ gegen f? (2 Punkte)

2. *Funktionenfolgen.*
   (a) Definiere die Begriffe punktweise und gleichmäßige Konvergenz für eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf $A \subseteq \mathbb{R}$. Welcher der beiden Begriffe ist stärker? Gib ein Argument bzw. ein Gegenbeispiel an. (4 Punkte)

   (b) Unter welchen Umständen vertauschen Limes und Integral einer Funktionenfolge. Formuliere das einschlägige Resultat exakt und beweise es. Begründe jeden deiner Beweisschritte. (3 Punkte)

3. *Differentialrechnung.*
   Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^m$.

   (a) Definiere den Begriff der Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $\xi \in G$. (2 Punkte)

   (b) Diskutiere für die Funktion f die Beziehung zwischen den Begriffen $\mathcal{C}^1$, Differenzierbarkeit, partieller Differenzierbarkeit und Setigkeit. Fertige dazu eine Skizze an, die alle einschlägigen (Nicht-)Implikationen enthält und begründe diese kurz. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Topologie des* $\mathbb{R}^n$.
   (a) Für $a \in \mathbb{R}^n$ definiere den Begriff einer Umgebung von a.
   Definiere den Begriff einer offenene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und fertige eine Skizze an, die die definierende Eigenschaft veranschaulicht. (2 Punkte)
   (b) Zeige: Für jede Folge $(x^{(k)})_k$ in der abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, die (in $\mathbb{R}^n$) konvergiert gilt, dass $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ in A liegt. Fertige eine Skizze an, die den Beweisverlauf illustriert. (3 Punkte)
   (c) Zeige: Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
   Gilt diese Aussage auch für beliebige Durchschnitte (d.h. Durchschnitte beliebig vieler offener Mengen)? Erweitere deinen obigen Beweis oder gib ein explizites Gegenbeispiel an. (3 Punkte)

5. *Integralrechnung.*
   (a) Definiere die Begriffe Gradientenfeld und Integrabilitätsbedingungen. (2 Pkte)
   (b) Zeige, dass jedes stetig differenzierbare Gradientenfeld die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. (2 Punkte)

6. *Rechenaufgaben.*
   (a) Berechne die Richtungsableitung von

$$f(x,y) = 2e^{xy^2}$$

   im Punkt $(1,1)$ in Richtung zum Ursprung $(0,0)$. (2 Punkte)
   (b) Berechne die Jacobi-Matrix der Funktion $f(x,y) = \Big(xe^y, x^2+y^3, \sin(xy)\Big)$.
   (2 Punkte)
   (c) Für $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $(t \in [0,2\pi])$ und $v(x,y) = (x,y)$ berechne das Wegintegral $\int_\gamma v$. (2 Punkte)

7. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)

   (a) Es gibt keine Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.
   (b) Für jede $\mathcal{C}^\infty$-Funktion f auf einem Intervall $(-a,a)$ gilt: Falls die Taylor-Reihe $T[f,0]$ überhaupt konvergiert, dann schon gegen die Funktion f selbst.