Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Note:**

# Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

**Roland Steinbauer, Sommersemester 2013**

**4. Prüfungstermin (28.2.2014)**

Gruppe A

1. *Funktionenfolgen.*
   (a) Definiere den Begriff der Unendlich- oder Supremumsnorm für Funktionen $f : \mathbb{C} \supseteq A \to \mathbb{C}$. (1 Punkt)
   (b) Zeige, dass für Funktionenfolgen $(f_n)$ auf $A \subseteq \mathbb{C}$ gilt:
   $$f_n \to f \quad \text{gleichmäßig} \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$
   Stelle die Situation graphisch dar. (2 Punkte)
   (c) Unter welchen Umständen vertauschen Limes und Ableitung einer Funktionenfolge? Formuliere und beweise das einschlägige Resultat aus der Vorlesung und begründe alle deine Beweisschritte. (5 Punkte)

2. *Potenz- und Taylorreihen.*
   (a) Sei $R$ der Konvergenzradius der (komplexen) Potenzreihe $\sum c_k(z - z_0)^k$. Zeige: Falls $\mid \frac{c_n}{c_{n+1}} \mid$ konvergiert, dann gilt (2 Punkte)
   $$R = \lim_{n\to\infty} \mid \frac{c_n}{c_{n+1}} \mid .$$
   (b) Bestimme den Konvergezradius von $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$. (1 Punkt)
   (c) Berechne die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \log(1+x)$ mit Entwicklungspunkt $x = 0$. Bestimme für welche $x$ diese Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert. (6 Punkte)

3. *Topologie des $\mathbb{R}^n$.*
   (a) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ definiere den Begriff der $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ und zeige, dass $U_\varepsilon(a)$ offen ist. Welche Eigenschaft der Norm geht hier essentiell ein? Fertige eine Skizze an! (4 Punkte)
   (b) Gib eine einfache, anschauliche Formulierung des Prinzips der koordinatenweisen Konvergenz (PKK) im $\mathbb{R}^n$ an und verdeutliche diese durch eine Skizze im $\mathbb{R}^2$. (2 Punkte)

**Bitte umblättern**

4. *Differentialrechnung.*

   (a) Diskutiere für eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) die Beziehung zwischen den Begriffen $\mathcal{C}^1$, Differenzierbarkeit, partieller Differenzierbarkeit und Setigkeit. Fertige dazu eine Skizze an, die alle einschlägigen (Nicht-)Implikationen enthält und begründe diese kurz. (3 Punkte)

   (b) Definiere den Begriff der Richtungsableitung $D_v f(\xi)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi$ in Richtung $v$ und fertige eine instruktive Skizze an. (2 Punkte)

   (c) Wie hängt die Richtungsableitung mit dem Gradienten zusammen? (2 Punkte)

5. *Integralrechnung.*
   Betrachte das glatte Vektorfeld auf $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$v(x,y) = \left( \frac{y}{x^2+y^2} \ , \ \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

   und bearbeite die folgenden Punkte (je 2 Punkte):

   (a) Zeige, dass auf $G$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

   (b) Zeige, dass $v$ kein Gradientenfeld ist.

   (c) Warum ergeben (a) und (b) keinen Widerspruch?

6. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)

   (a) Der $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

   (b) Der Graph eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kann als „Landschaft” dargestellt werden.