Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Sommersemester 2013

6. Prüfungstermin (29.9.2014)

Gruppe A

1. *Funktionenfolgen.*
   (a) Erkläre anschaulich, was es für eine Funktionenfolge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ bedeutet gleichmäßig gegen ein $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zu konvergieren. Fertige eine Skizze an. (2 Punkte)
   (b) Beweise: Falls eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ punktweise gegen $f : A \to \mathbb{R}$ konvergiert und f_n gleichmäßig konvergiert, dann ist der gleichmäßige Limes von f_n ebenfalls f. (2 Punkte)
   (c) Diskutiere ein explizites Beispiel, das zeigt, dass die Ableitungsfolge f_n' einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht (einmal) in jedem Punkt $x \in [a,b]$ punktweise konvergieren muss. (2 Punkte)

2. *Potenz- und Taylorreihen.*
   (a) Definiere den Begriff einer (komplexen) Potenzreihe. Was kann man sich intuitiv unter einer Potenzreihe vorstellen? Handelt es sich dabei um „einfache" oder „komplizierte" Funktionen? (3 Punkte)
   (b) Bestimme das Taylorpolynom $T_3[f,0]$ von
   $$f(x) = e^x \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
   an der Stelle $x_0 = 0$. Bestimme die Lagrange-Form des Restglieds $R_4(x)$ und gib eine Abschätzung für $|R_4(x)|$ auf $[-1,1]$ an. (4 Punkte)

3. *Topologie des $\mathbb{R}^n$.*
   (a) Zeige die folgende Aussage für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$:
   A ist abgeschlossen genau dann wenn für jede (in $\mathbb{R}^n$) konvergente Folge $(x^{(k)})_k$ in A ihr Grenzwert $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ wieder in A liegt. Erkläre den Beweisgang (in beiden Richtungen) auch in Worten! (6 Punkte)
   (b) Formuliere das Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz (PKK) im $\mathbb{R}^n$ mit eigenen Worten und fertige eine instruktive Skizze für den Fall $n = 2$ an. (2 Punkte)

Bitte umblättern

4. *Differentialrechnung.*

   (a) Formuliere den Mittelwertsatz für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ und beweise ihn.

   Worauf beruht der Beweis?

   Woran liegt es, dass der Satz nicht ohne weiteres auf Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ verallgemeinert werden kann? (5 Punkte)

   (b) Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : R^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ xy \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+2y \\ y \end{pmatrix}.$$

   Berechne $D(g \circ f)(0,1)$ mit Hilfe der Kettenregel. (2 Punkte)

5. *Integralrechnung.*

   (a) Definiere den Begriff eines Wegintegrals (eines stetigen Vektorfeldes auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ längs eines C^1-Weges) und erkläre seine anschauliche Bedeutung. (2 Punkte)

   (b) Formuliere exakt und beweise: Ein stetig differenzierbares Gradientenfeld erfüllt die Integrabilitätsbedingungen. Ist die Differenzierbarkeitsbedingung an das Vektorfeld notwendig? (3 Punkte)

   (c) Berechne das Volumen einer Kugel B_r vom Radius r im $\mathbb{R}^3$ mittels des Prinzips von Cavalieri. Fertige eine Skizze an! (3 Punkte)

6. *Richtig oder falsch?*

   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)

   (a) Eine punktweise konvergente Funktionenfolge auf einer kompakten Definitionsmenge konvergiert auch gleichmäßig.

   (b) Der $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.