Prüfungsausarbeitung

2013-06-25

P 1

1. Termin 28.6.2013

Gruppe A.

[1] (a) Sei $f_n: \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}\,[\mathbb{C}]$ eine Funktionenfolge, $f: A \to \mathbb{R}\,[\mathbb{C}]$ eine Fkt.

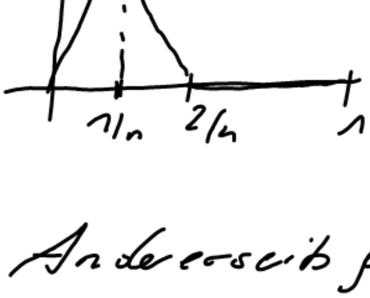
$f_n \to f$ pktw $:\iff \forall x \in A: f_n(x) \to f(x)$, d.h.

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \to f$ glm $:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A$

Die glm Konvergenz ist stärker, d.h. $f_n \to f$ glm $\Rightarrow$ $f_n \to f$ pktw, denn (wie aus den Definitionen ersichtlich) kann bei fixem ε das N im Falle der glm Konv. unabhängig vom x (gleichmäßig) gewählt werden.

Die Umkehrung ist falsch; ein explizites Gegenbsp sind die „Zacken-Fkt" f_n auf $A = [0,1]$. Es gilt



$f_n \to 0$ pktw weil $f_n(0) = 0\ \forall n$ und jedes $x > 0$ ist schließlich rechts von $1/n$ [$1/n < x$] und daher $f_n(x) = 0\ \forall n$ groß genug.

Andererseits gilt $f_n \not\to 0$ glm [ein anderer lim ist nicht möglich wegen glm Konv $\Rightarrow$ pktw. Konv] denn $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = n \to \infty$.

(b) Falls $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f_n \to f$ glm,
dann gilt
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim f_n(t)\,dt = \lim \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Beweis: f_n stetig, $f_n \to f$ glm $\Rightarrow$ f stetig

f glm durch Treppenfkt approximierbar $\Rightarrow$ f_n, f R-intbar auf $[a,b]$ und es gilt
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\right| \underbrace{\leq}_{\Delta\text{-Ugl. f. }\int} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{MWS-}\int} (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{f_n \to f \text{ glm}} 0$$
$\square$

$\boxed{2}$ (a) Für eine PR $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ ist der KR definiert als
$$R := \sup\left\{ r \in [0,\infty) \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ konv. in } K_r(z_0) \right\}$$
$K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r\}$

(b) Falls eine PR einen KR R mit $0 < R < \infty$ besitzt,
dann konvergiert die PR pktw auf $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ und konv sogar abs & glm auf jedem $K_r(z_0)$ mit $r < R$. Sie divergiert auf $(K_R(z_0))^c = \{c \in \mathbb{C} : |z-z_0| > R\}$. Auf $S_R(z_0) = \{c \in \mathbb{C} : |z-z_0| = R\}$ kann keine allg. Aussage gemacht werden (sowohl Konv. als auch Div. sind möglich).

(c) $T_n[f,x_0](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x_0 und x

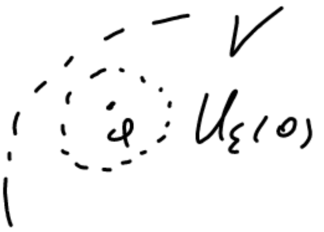
$= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Die Taylorreihe $T[f,x_0](x)$ konvergiert genau dann gegen $f(x)$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x)$

wenn $R_n(x) \to 0$ $(n\to\infty)$ gilt.

3 (a) Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von a, falls $\exists \varepsilon>0: U_\varepsilon(a) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x-a\|<\varepsilon\} \subseteq U$.

Eine Menge $V\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt offen, falls sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. $\forall a\in V\ \exists \varepsilon>0\ U_\varepsilon(a)\subseteq V$



[Um jedes $a\in V$ gibt es eine ganze „ε-Schutzkugel" um a, die ganz in V liegt.]

(b) Seien $V_1,\dots,V_n \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $(n\in\mathbb{N})$ z.z.: $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ ist offen.

Sei dazu also $a\in\bigcap_{i=1}^{n} V_i \Rightarrow \forall i\ \exists \varepsilon_i : U_{\varepsilon_i}(a)\subseteq V_i$

Wähle $\varepsilon = \min_{1\le i\le n}\varepsilon_i \Longrightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq U_{\varepsilon_i}(a) \subseteq V_i \ \forall 1\le i\le n$

$\Longrightarrow U_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i$

[$\varepsilon>0$?] $\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ offen $\square$

Diese Aussage gilt nicht für beliebige Durchschnitte. Der obige Beweis scheitert an der Def von ε – man müsste $\varepsilon := \sup_{i \in I} \varepsilon_i$ setzen und daher gilt nur mehr $\varepsilon \geq 0$, was zu wenig ist um weiter zu machen.

Ein explizites Gegenbsp ist etwa $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = \{0\}$.

(c) Sei $(x^{(k)})_k$ Folge in A mit $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = a \in \mathbb{R}^n$.

z.z. $a \in A$.

Ang $a \notin A \Rightarrow a \in A^c$ und weil A abg $\Rightarrow A^c$ offen

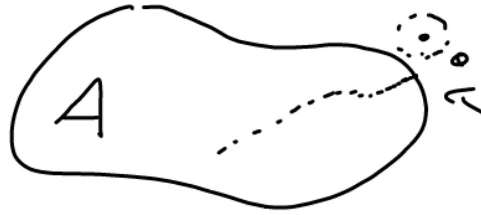
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A^c$

Das ist aber ein Widerspruch zu $x^{(k)} \to a$, denn lt. Def

$\exists N \; \forall k \geq N : x^{(k)} \in U_\varepsilon(a) \subseteq A^c$

$\Rightarrow \forall k \geq N : x^{(k)} \in A$ lt. Voraussetzung & $x^{(k)} \notin A$ $\lightning$

$\square$



Folge kann A nicht verlassen und daher nicht in $U_\varepsilon(a)$ gelangen

$\boxed{14}$ (a) $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ heißt diff'bar in $a \in G$, falls

$\exists A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

$\exists \delta > 0 \; \exists r : \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$ sodass

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } a+h \in G$$

und $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$

(b)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\boxed{f \text{ stetig (part.) diffbar}} \arrow[d, Rightarrow, shift left=1, "\text{klar per Def.}"'] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\cancel{\Uparrow}\ \text{schon für } n=1 \text{ falsch } [x \sin 1/x]"] & \\
\boxed{f \text{ diffbar}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{wie für } n=1"] \arrow[d, Rightarrow, shift left=1, "\text{klar per Def.}"'] \arrow[d, phantom, shift left=6, "\cancel{\Uparrow}"] & \boxed{f \text{ stetig}} \arrow[l, phantom, shift left=3, "\cancel{\Leftarrow}\ \text{schon für } n=1 \text{ falsch}"'] \\
\boxed{f \text{ part. diffbar}} \arrow[ur, phantom, "\cancel{\Rightarrow}\ \text{Peano}"] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{5}$ (a) Ein VF v auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld, falls $\exists \varphi: G \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi = v$

Ein VF $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen, falls $D_i v_j = D_j v_i \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$ gilt.

(b) Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$ ein $\mathcal{C}^1$-Gradientenfeld auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann $\exists \varphi: G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Fkt mit $\operatorname{grad} \varphi = v$, d.h. $D_i \varphi = v_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$. Daher gilt

$$D_j v_i = D_j D_i \varphi \underset{\substack{\text{Satz v. Schwarz} \\ \varphi \in \mathcal{C}^2}}{=} D_i D_j \varphi = D_i v_j .$$

6 (a) $Df = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2x & 3y^2 \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$

(b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(2y^2 e^{xy^2}, 4xy e^{xy^2}\right)$

$\operatorname{grad} f(1,1) = (2e, 4e)$

$v = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

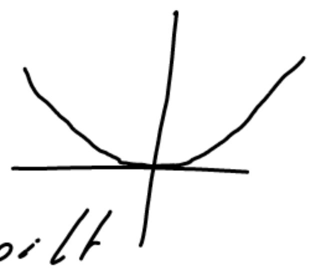
$D_v f(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 2e \\ 4e \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{\underline{\frac{-6}{\sqrt{2}} e}}$

(c) $\int_\gamma v = \int_0^{2\pi} \langle v(\gamma(t)) | \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = \boxed{\underline{0}}$

[Oder auch $v \in \mathcal{C}^\infty$ und $D_2 v_1 = 0 = D_1 v_2 \overset{\mathbb{R}^2 \text{ sternf.}}{\Longrightarrow} \oint_\gamma v = 0$]

7 (a) Falsch, denn $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



ist $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(0) = 0 \; \forall n$, daher gilt $T[f,0](x) = 0$ (trivialerweise konvergent) aber $T[f,0](x) = f(x)$ gilt nur in $x = 0$.

(b) Falsch: $\mathbb{R}^n, \emptyset$ sind beide offen & abg, denn klarerweise ist $\mathbb{R}^n$ offen [$\Rightarrow \emptyset$ abg] und $\emptyset$ ist trivialerweise offen [$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ abg].

GRUPPE B

1 siehe Gruppe A 2

2 —— " —— 1

3 —— " —— 4

4 —— " —— 3

5 —— " —— 5

6 (a) siehe Gruppe A 6 (b)

(b) —— " —— (a)

(c) —— " —— (c)

7 (a) —— " —— 7 (b)

(b) —— " —— (a)