PRÜFUNGSAUSARBEITUNG

2. TERMIN

1 (a) $f_n \to f$ pktw $:\Leftrightarrow \forall x\in A\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N$
$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

glm $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N\ \forall x\in A$
$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

Bei der glm Konvergenz muss also bei fixem ε das N (gleichmäßig) für alle Pkte x wählbar sein. Daher ist glm Konvergenz der stärkere Begriff.

(b) Satz v. Weierstraß: Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf $A\subseteq\mathbb{C}$ sodass die (reelle) Reihe $\sum \|f_n\|<\infty$, dann gilt:

(i) Für alle $x\in A$ konvergiert $\sum |f_n(x)|$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} f_k \to F$ glm wobei $F(x):=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

Beweis (i) $|f_k(x)|\leq \|f_k\|\ \forall x\ \forall k \underset{\text{krit}}{\overset{\text{Majoranten}}{\Longrightarrow}} \sum |f_k(x)|<\infty$

(ii) Weil $\sum |f_k(x)|<\infty \Rightarrow \sum f_k(x)<\infty$ ist F auf A definiert. Sei nun $\varepsilon>0$ dann folgt aus der Voraussetzung & dem Cauchyprinzip $\exists N\ \forall n\geq N\ \sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k(x)\|<\varepsilon$ (*).

Daher gilt $\forall x\in A\ \forall n\geq N$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)-F(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \overset{\text{v. }\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)| \underset{\text{Sandwich}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k(x)\| \overset{(*)}{<} \varepsilon \qquad \square$$

$\boxed{2}$ (a) Sei $(a_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dann heißt der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

Potenzreihe mit Entwicklungspkt x_0 & Koeffizienten a_k.

(b) Intuitiv ist eine PR ein Polynom mit „unendlichem Grad" und formal der Limes einer Folge von Polynomen mit ansteigendem Grad $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$. Daher sind PR nach den Polynomen gewissermaßen die nächst einfachen Fkt und wir haben viele wichtige Fkt ab PR definiert zB, exp, sin, cos.

(c) Nach dem Satz von Taylor gilt für jede glatte Fkt f auf $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

wobei die Summe Taylorpolynom (von f in x_0) genannt wird und das Restglied $R_{n+1}(x)$ folgende Form(en) hat

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^k \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ \& } x_0$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Die Taylorreihe $T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
konvergiert genau dann gegen
$f(x)$ falls $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$.
Das ist aber nicht für alle $f \in C^\infty$ der Fall
(Die TR muß außer in $x = x_0$ garnicht
konvergieren und selbst falls sie in $x \neq x_0$
konvergiert muß sie nicht gegen die Fkt f
konvergieren, zB $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x_0 = 0$.

Aus der komplexen Analysis lernt man, dass genau
jene Fkt eine TE haben, die sich holomorph fortsetzen lassen.)

$\boxed{3}$ (a) Eine Folge $(x^{(k)})_k$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau
dann gegen $x \in \mathbb{R}^n$, falls für alle Koordinaten
$1 \le i \le n$ gilt, dass $x_i^{(k)} \to x_i$ (in $\mathbb{R}$).

[Hier ist $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$.]

Beweis: „$\Rightarrow$" $x^{(k)} \to x \iff \|x^{(k)} - x\| \to 0$ und daher
$\forall 1 \le i \le n: \; |x_i^{(k)} - x_i| \le \|x^{(k)} - x\| \to 0$

$$|c_i| = \sqrt{c_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \|c\|$$

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \; \forall 1 \le i \le n \; |x_i^{(k)} - x_i| \le \varepsilon/\sqrt{n} \; \forall k \ge N$
$\Rightarrow \forall k \ge N$:

$$\|x^{(k)} - x\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2\right)^{1/2} \le \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon \qquad \square$$

$\boxed{3}$ (b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kp $:\Longleftrightarrow$ Jede Folge in A hat eine (in A) konvergente Teilfolge

Heine-Borel
$\Longleftrightarrow$ A ist beschränkt & abg.

$\boxed{4}$ (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^2$, falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

heißt partiell stetig in $(0,0)$, falls

die beiden partiellen Abb $\begin{array}{l} x \mapsto f(x,0) \\ y \mapsto f(0,y) \end{array}$

(als Fkt $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) stetig in $x=0$ bzw $y=0$ sind.

Die Stetigkeit (in einem Pkt) ist stärker als die partielle Stetigkeit; ein explizites Gegenbsp ist die Peano-Fkt

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/x^2+y^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) f heißt partiell in x_0 nach der i-ten Koordinate diffbar, falls

$$D_i f(x_0) := \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

existiert & endlich ist; hier ist e_i der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$

$\boxed{4}$ (b) Fortsetzung: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor, d.h. $\|v\| = 1$ dann ist die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v definiert als

$$D_v f(x_0) := \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

falls der Limes existiert & endlich ist.

Man sieht sofort aus den Defs, dass die partiellen Ableitungen gerade die Richtungsableitungen längs der Koordinatenachsen sind. Umgekehrt zeigt eine leichte Rechnung, dass sich beliebige Richtungsableitungen aus den part. Abl. berechnen lassen gemäß

$$D_v f(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0) \mid v \rangle .$$

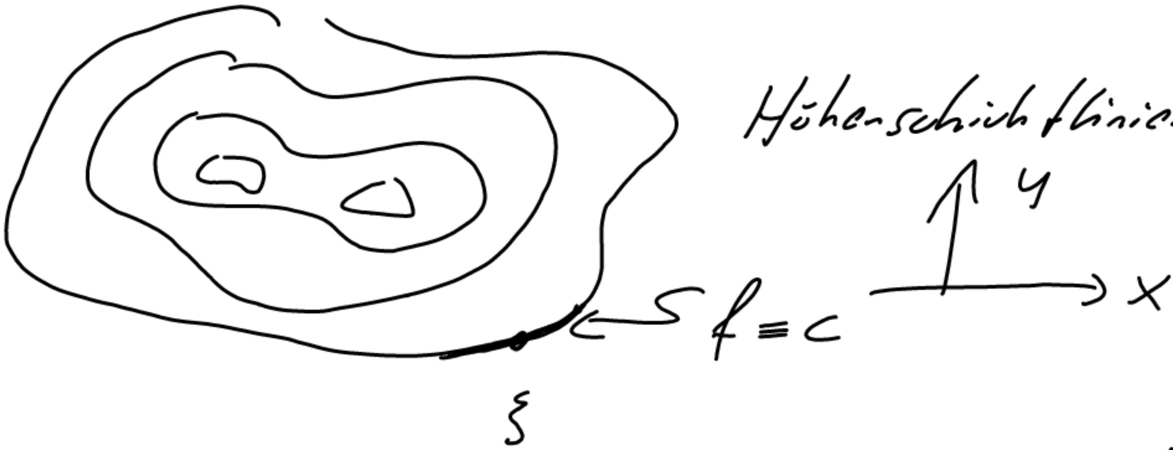
$\boxed{5}$ (a) Implizite-Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ eine C^1-Fkt, $c \in \mathbb{R}$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in G$ mit $f(\xi) = c$ und $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$. Falls $D_2 f(\xi) \neq 0$ dann gibt es Umgebungen U von ξ_1 und V von ξ_2 und eine Fkt $h: U \to V$, sodass $h \in C^1$ und eindeutig mit der Eigenschaft ist, dass

$$\forall (x,y) \in U \times V \quad f(x,y) = c \iff y = h(x).$$

Außerdem gilt dann

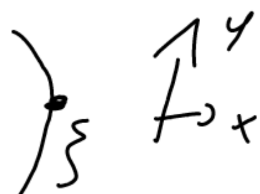
$$h'(x) = -\frac{D_1 f(x, h(x))}{D_2 f(x, h(x))} .$$

Dieses etwas unhandlich wirkende Thm handelt von der Auflösbarkeit von Gleichungen bzw von der Frage ob die Höhenschichtlinien von f als Fkt y von x geschrieben werden können; graphisch:



Genauer lautet die (2.) Frage, ob die Höhenschichtlinie der Höhe c nahe ξ als Fkt $y(x)$ geschrieben werden kann. Die Antwort des Thms ist ja, falls (neben den offensichtlich sinnvollen Bedingungen $f(\xi) = c$, $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$) $D_2 f(\xi) \neq 0$ ist. Diese Bedingung bedeutet aber gerade, dass die Höhenschichtlinie in ξ nicht senkrecht ist, was natürlich (ebenfalls) eine notwendige Bed. ist; graphisch:

Sonst könnte Höhenschichtlinie degenerieren, etw in einem Max.



y nicht als Fkt von x schreibbar

$\boxed{5}$ (b) Sei v ein stetiges VF auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\gamma : [a, b] \to G$ ein C^1 Weg. Dann heißt

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t) \rangle \, dt$$

Wegintegral von f längs γ.

Falls G ein Gebiet ist (d.h. offen & wegzusammenh.) und falls v wegunabhängige Integrale hat (d.h. für alle C^1-Wege γ von p nach q in G gilt sind die Wegintegrale $\int_\gamma v$ von γ unabhängig) kann man wie folgt eine Stammfkt φ von v finden: Fixiere einen beliebigen Pkt $p \in G$. Für $x \in G$ wähle einen beliebigen Weg γ_x von p nach x in G und setze

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} v$$

Das ist ein Analogon zur 1. Aussage des HsDI, denn in Kurzform schreibt sich obige Aussage als

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} v \implies \operatorname{grad} \varphi = v$$

während der HsDI besagt ($f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$)

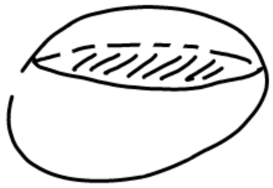
$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \implies F' = f.$$

$\boxed{6}$ (a) [Der Trick ist es, mit der Stammfkt zu beginnen]

Setze $\varphi(x, y) = xy \implies \operatorname{grad} \varphi(x, y) = (y, x)$

$\implies v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ ist ein Gradientenfeld.

16 (b) [Verwende das Prinzip von Cavalieri]



$$B = \int_{-1}^{1} |B_\xi| \quad \text{und}$$

B_ξ ist Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1-\xi^2}$
also $|B_\xi| = (1-\xi^2)\pi$

$$\Rightarrow B = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)\pi \, d\xi = \pi\left(\xi - \xi^3/3\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(1 - \tfrac{1}{3} - \left(-1 + 1/3\right)\right) =$$

$$= \pi\left(2 - 2/3\right) = \underline{\underline{4/3\,\pi}}$$

(c) $f(x,y,z) = \left(\cos(yz), \sin(xz), e^{xy^2z}\right)$

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz) \\ y^2 z e^{xy^2z} & 2yxz e^{xy^2z} & xy^2 e^{xy^2z} \end{pmatrix}$$

17 (a) Nein, der erste Teil der Aussage ist zwar richtig, aber die Jacobi-Matrix $Df(\xi): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat m Zeilen & n Spalten und ist daher eine $(m \times n)$-Matrix

(b) Ja, denn sei $v = \operatorname{grad} \varphi \in C^1 \Rightarrow$ $\varphi \in C^2$ und es gilt

$$D_k v_j = D_k D_j \varphi = D_j D_k \varphi = D_j v_k.$$

Schwarz