Prüfungsausarbeitung **4. TERMIN** (2019-07-25)

**1** (a) Sei $f: \mathbb{C} \supseteq A \to \mathbb{C}$, dann definieren wir die Supremumsnorm von $f$ via

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

[wobei $\|f\|_{\infty,A} = \infty$, falls $f$ unbeschränkt auf $A$]

(b) $f_n: \mathbb{C} \supseteq A \to \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$

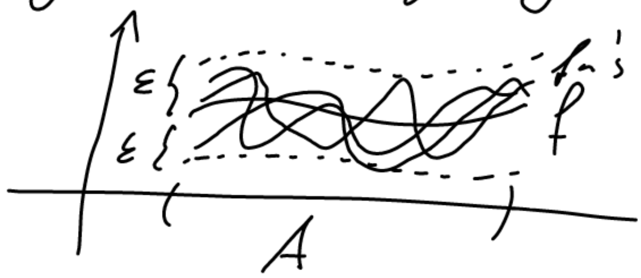
$$\underline{f_n \to f \text{ glm}} :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_{\infty,A} \to 0$$

Graphisch bedeutet $f_n \to f$ glm, dass die $f_n$ schließlich in jedem $\varepsilon$-Streifen um $f$ bleiben, d.h. in jeder $\|\;\|_\infty$-Umgebung von $f$ bleiben.



[1] (c) Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von $\mathcal{C}^1$-Fkt und
- $f_n$ konv. pktw gegen ein $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $f_n'$ konv. glm

Dann ist $f$ $\mathcal{C}^1$ und es gilt
$$f' = (\lim f_n)' = \lim (f_n').$$

Beweis: Wir setzen $g(x) := \lim f_n'(x)$

$$\xRightarrow[\text{ist stetig}]{\text{glm lim st.}} g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist stetig} \quad (*)$$

$$f_n \in \mathcal{C}^1 \overset{HsDI}{\Longrightarrow} \forall x \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$f_n' \to g \text{ glm} \xRightarrow[\text{vertauscht mit } \int]{\text{glm lim}} f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\overset{HsDI}{\Longrightarrow} \underline{f'(x)} = 0 + \underline{g(x)}$$

Daher ist $g = f'$ stetig $(*)$, also $f \in \mathcal{C}^1$. $\square$

[2] (a) Anwendung des QT; sei $\rho := \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$

Mit $a_n := c_n (z - z_0)^n$ gilt dann lt QT

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{c_n (z - z_0)^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |z - z_0| \to \frac{|z - z_0|}{\rho}$$

Daher gilt abs Konv, falls $|z-z_0|<\rho$ und div, falls $|z-z_0|>\rho$

Daher gilt lt. Def. für den KR $\underline{\underline{R=\rho}}$ ! ☐

[2] (b) $\underline{R} \overset{(a)}{=} \lim \frac{n}{n+1} = \underline{1}$

(c) $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$

Berechne die Abl: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$,

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)} = \frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$

<u>Beh</u>: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

<u>Beweis</u>: Induktion; $n=1$ ✓

<u>$n \leadsto n+1$</u>: $f^{(n+1)}(x) = \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ ☐

Daher ergibt sich

$$\underline{T[f,0](x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \overset{\log(1)=0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Zur Beantwortung der Frage nach der Konvergenz müssen wir das Restglied

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\xi)^n} x^n \right| \quad (|\xi| \le |x|)$$

abschätzen.

Klarerweise gilt $x > -1$ und mit (a) resp. (b) gilt

$$\underline{\underline{R}} = \lim \frac{n+1}{n} \underline{= 1.}$$

1. Fall: $0 < x \le 1$, daher $0 \le \xi \le 1$ und daher

$$|R_n(x)| = \frac{x^n}{n\underbrace{(1+\xi)^n}_{\ge 1}} \le \frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$$

2. Fall: $-1 < x < 0$, daher $-1 < x \le \xi \le 0$ und

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n} \underbrace{\left| \frac{x}{1+\xi} \right|^n}_{|\,| \le \left|\frac{x}{1+x}\right| \le 1} \le \frac{1}{n} \to 0$$

Also gilt $\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \forall x \in (-1, 1]}$

$\boxed{3}$ $U_\varepsilon(a) := \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y-a\| < \varepsilon \}$

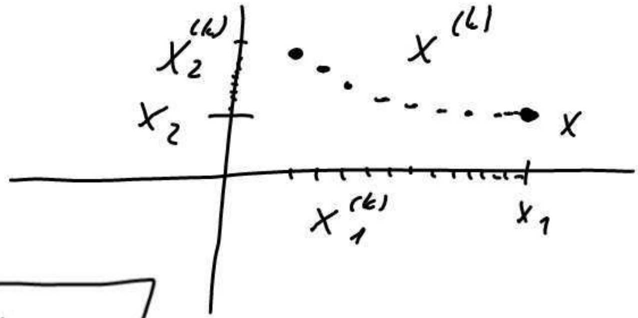
$U_\varepsilon(a)$ ist offen, denn sei $b \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow \|b-a\| < \varepsilon$

Setze $\varepsilon_1 := \varepsilon - \|b-a\| > 0$. Dann gilt $U_{\varepsilon_1}(b) \subseteq U_\varepsilon(a)$, denn für $x \in U_{\varepsilon_1}(b)$ ist

$$\underset{\sim}{\|x-a\|} \le \|x-b\| + \|b-a\| \underset{\sim}{<} \varepsilon_1 + \|b-a\| = \underset{\sim}{\varepsilon}$$

Und damit ist $U_\varepsilon(a)$ offen.
Essentiell ist hier die $\Delta$-Ungl.


(b) PKK besagt, dass eine Folge im $\mathbb{R}^n$ genau dann gegen einen Pkt konvergiert, wenn alle Koordinatenfolgen gegen die resp. Koordinaten des Pktes konvergieren; graphisch im $\mathbb{R}^2$




4

(a) $\boxed{f \text{ stetig (part) diffbar}}$

klarer def. $\Downarrow$ $\not\Uparrow$ schon für $n=1$ falsch [$x \sin 1/x$]

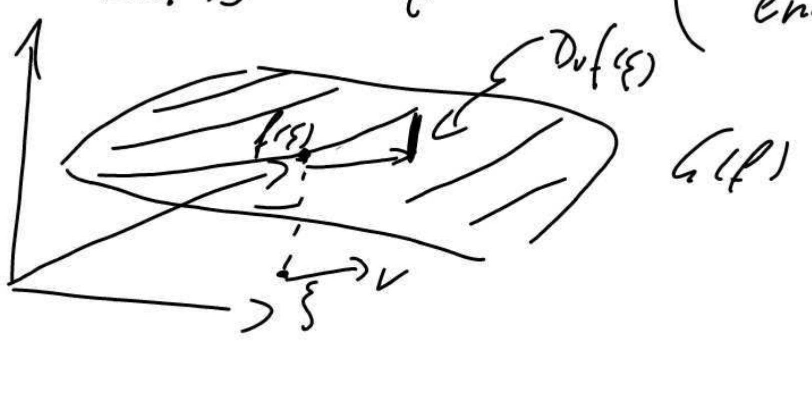
$\boxed{f \text{ diffbar}}$ $\xRightarrow{\text{wie für } n=1}$ $\boxed{f \text{ stetig}}$

$\not\Leftarrow$ schon für $n=1$ falsch

klarer def. $\Downarrow$ $\not\Uparrow$

$\boxed{f \text{ part. diffbar}}$ $\not\Rightarrow$ Peano

(b) $D_v f(\xi) := \lim\limits_{0 \neq t \to 0} \dfrac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}$ (falls $\exists$ und endlich)



4 (c) Es gilt $D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi) | v \rangle$, denn

$$\frac{f(\xi+tv)-f(\xi)}{t} \overset{\text{Def Diffb.}}{=} \frac{Df(\xi)\cdot tv + r(tv)}{t} = Df(\xi)\cdot v + \frac{r(tv)}{t}$$

$$\xrightarrow{\xi_1} Df(\xi)\cdot v = \langle \operatorname{grad} f(\xi) | v \rangle$$

5 (a) zz $D_1 v_2 = D_2 v_1$

$$D_1 v_2 = \partial_x \left( \frac{-x}{x^2+y^2} \right) = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 v_1 = \partial_y \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) Zeige, dass $\int_{S^1} v \neq 0$, damit kann $v$ kein Gradientenfeld sein (Ein solches hätte ja wegunabhängige Integrale und $\oint v = 0$ für alle geschlossenen Wege).

$S^1$: $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{S^1} v = \int_0^{2\pi} \langle v(\gamma(t)) | \dot\gamma(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = \underline{2\pi \neq 0}$$

$\boxed{5}$ (c) Das Problem ist das „Loch" $(0,0)$ im Defbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Daher ist der Defbereich nicht sternförmig und daher der einschlägige Satz nicht anwendbar.

$\to$ $v$ $\mathcal{C}^1$-vf auf sternförmigem Gebiet: Integrabilitätsbed $\Rightarrow$ Gradientenfeld

$\boxed{6}$ (a) Ja, jede CF in $\mathbb{R}^n$ konvergiert; das ist eine unmittelbare Folgerung aus PKK.

(b) Nein, das gilt nur für skalare Flkt auf $\mathbb{R}^2$, also $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. [Jede Komponentenfunkt von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ könnte als Landschaft dargestellt werden ... ]