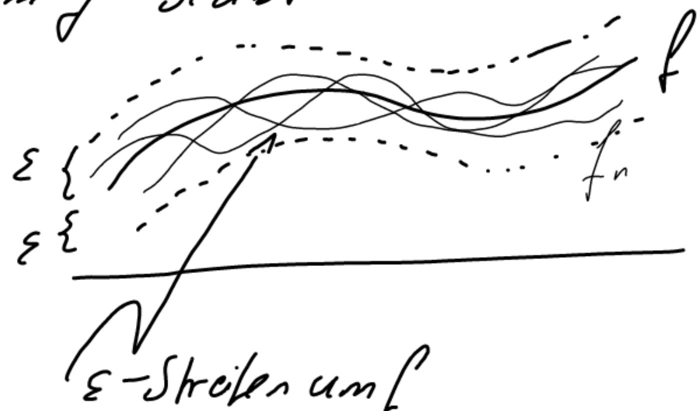
2014-08-23

PRÜFUNGSAUSARBEITUNG

6. TERMIN

1 (a) $f_n \to f$ glm bedeutet, dass $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, also, dass f_n für n groß genug schließlich in jedem ε-Streifen um f bleibt



(b) $f_n \to f$ pktw & $f_n \to g$ glm $\overset{z.z.}{\Longrightarrow}$ $f = g$

$f_n \to g$ glm $\Rightarrow f_n \to g$ pktw

$\Rightarrow \forall x \in A: \; f_n(x) \to f(x)$ und

$f_n(x) \to g(x)$ in $\mathbb{R}$

Mit der Eindeutigkeit des Limes [in $\mathbb{R}$] folgt $\forall x \in A: f(x) = g(x)$

$\Longrightarrow f = g$ $\square$

$\boxed{1}$ (c) Wir betrachten $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ $(0 \le x \le 2\pi)$

Dann gilt: $\|f_n\|_\infty = 1/\sqrt{n} \to 0$ also $f_n \to 0$ glm

aber $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ und z.B.

$f_n'(0) = \sqrt{n} \longrightarrow \infty$ also f_n' nicht

pktw konv in $x=0$

[oder auch das Bsp aus VO 1.25(i).]

$\boxed{2}$ (a) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dann heißt der Ausdruck $(z \in \mathbb{C})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

(komplexe) Potenzreihe mit (Entwicklungs-) Koeffizienten $(c_n)_n$ und Entwicklungspkt z_0.

Gewissermaßen sind PR "einfache" Fkt, nämlich die nächsteinfachen nach den Polynomen: sie haben lediglich "unendlichen Grad". Genauer bedeutet dies, dass PR Limiten von Polynomen sind wobei der Grad $\to\infty$ geht.

12 (b) $f(x) = e^x \sin(x)$

- $T_3[f,0](x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(x)\frac{x^3}{6}$

$$f(x) = e^x \sin(x) \qquad \underline{f(0) = 0}$$

$$f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

$$\underline{f'(0) = 1}$$

$$f''(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$= 2e^x \cos(x); \quad \underline{f''(0) = 2}$$

$$f'''(x) = 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

$$\underline{f'''(0) = 2}$$

$$\Rightarrow T_3[f,0](x) = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3$$

$$= \underline{x + x^2 + 1/3\, x^3}$$

- $f''''(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) + 2e^x(-\sin(x) - \cos(x))$

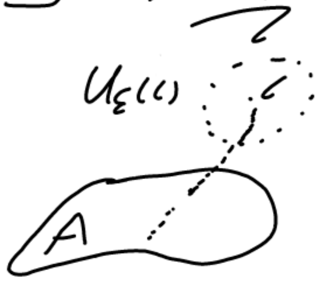
$$= \underline{-4e^x \sin(x)}$$

$$\Rightarrow R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \quad \text{für ein } \xi \in [-x, x]$$

$$= -4e^{\xi}\sin(\xi)\,\frac{x^4}{24}$$

$$\Rightarrow |R_4(x)| \leq e^{\xi}\frac{|x|^4}{6} \underset{|x| \leq 1}{\leq} e/6 \approx 0{,}45$$

13 (a) „$\Rightarrow$": Indirekter Beweis: falls $\lim x^{(k)} =: c \notin A$ dann besitzt c eine Schutzkugel in A^c, die x_n einerseits betreten muß, andererseits aber nicht kann; explizit:



Indir ang $c := \lim x^{(k)} \notin A$ (aber alle $x^{(k)} \in A$)

A abg $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = A^c$ offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(c) \subseteq A^c \Rightarrow U_\varepsilon(c) \cap A = \emptyset \quad (*)$

Andererseits $c = \lim x^{(k)} \Rightarrow \exists N \; \forall k \geq N \; x^{(k)} \in U_\varepsilon(c)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} x^{(k)} \notin A \; \forall k \geq N$ ↯

„$\Leftarrow$": Wieder indirekt: Wäre A^c nicht offen dann gäbe es zu den Randpunkten hin konvergente Folgen in A die gegen Punkte in A^c konvergieren

Explizit:

Wir zeigen A^c ist offen. Indir ang nicht $\Rightarrow \exists b \in A^c : \forall \varepsilon > 0 \; U_\varepsilon(b) \not\subseteq A^c$

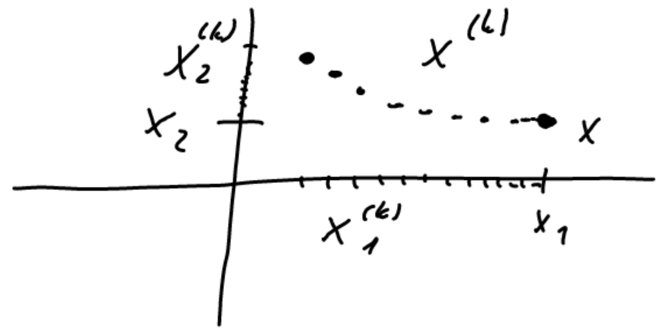
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : U_{1/k}(b) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \; \exists x^{(k)} \in U_{1/k}(b) \cap A$

$\Rightarrow x^{(k)}$ ist Folge in A mit $x^{(k)} \to b \notin A$ ↯ zur Voraussetzung.

$\square$

[3] (b) PKK besagt, dass eine Folge im $\mathbb{R}^n$ genau dann gegen einen Pkt konvergiert, wenn alle Koordinatenfolgen gegen die resp. Koordinaten des Pktes konvergieren; graphisch im $\mathbb{R}^2$



[4] (a) Thm (MWS). Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar auf G und seien $\xi, \xi+h \in G$ so, dass auch ihre gesamte Verbindungsgerade in G liegt. Dann $\exists\, \Theta \in (0,1)$ sodass

$$f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi+\Theta h)\cdot h.$$

Beweis. Wir setzen $\varphi(t) = f(\xi+th)$ $\quad t\in[0,1]$

$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow}$ φ diffbar auf $[0,1]$ mit $\varphi'(t) = Df(\xi+th)\cdot h$

$\overset{\text{1D MWS}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \Theta\in(0,1)$ mit $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\Theta)$ d.h.

$$f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi+\Theta h)\cdot h$$

$\square$

Der Beweis beruht auf dem MWS in einer Dimension & verwendet die Kettenregel.
Bei mehrdim Zielbereich würde der Satz für

jede Komponentenfunktion gelten, die Zwischenstelle Θ (resp $\xi+\Theta h$) wäre aber für jede Komponente eine andere.

[4] (b) Kettenregel: $D(g\circ f)(\xi) = Dg(f(\xi))\cdot Df(\xi)$

Hier $\xi=(0,1) \Rightarrow f(\xi) = f(0,1) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ y & x\end{pmatrix} \Rightarrow Df(0,1) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = Dg(-1,0)$$

$$\Rightarrow D(g\circ f)(0,1) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

[5] (a) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, v ein stetiges VF auf G (i.e. $v: G\to\mathbb{R}^n$ stetig), $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg mit $\gamma([a,b])\subseteq G$. Dann definieren wir das Wegintegral von v längs γ als

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)) \,|\, \dot\gamma(t)\rangle \, dt.$$

Bedeutung: Durch das Skalarprod. wird das VF v längs γ auf die Richtung $\dot\gamma$ von γ projiziert. Das Integral summiert die entsprechenden Anteile (sammelt sie auf).

Ph: $\int_\gamma v$ ist die Arbeit die bei Bewegung eines MP im Kraftfeld v geleistet wird.

(b) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, v ein C^1-Gradientenfeld (mit Stammfkt φ) auf G, dann gilt

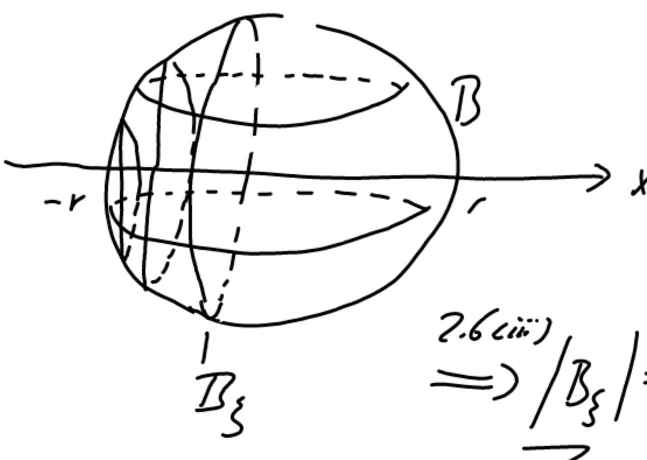
$$D_j v_k = D_k v_j \qquad \forall\, 1\le i,j\le n$$

<u>Beweis</u>. Sei φ Stammfkt von v [d.h. $\operatorname{grad}\varphi = v$]
$\Rightarrow \varphi\in C^2(G)$ und es gilt $(1\le j,k\le n)$

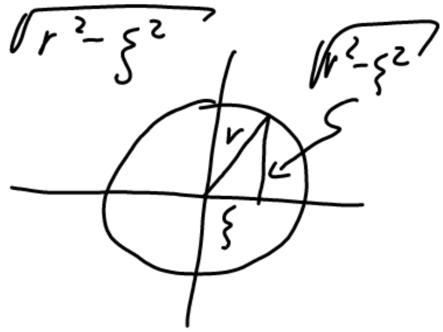
$$D_j v_k = D_j D_k \varphi \underset{\text{Satz v. Schwarz}}{=} D_k D_j \varphi = D_k v_j . \qquad \square$$

Ja der Satz von Schwarz benötigt als Voraussetzung, dass $\varphi\in C^2$; schon für nur $2\times$ diffbares φ ist die Aussage des Satzes <u>i.a. nicht</u> erfüllt.

$\boxed{5}$ (c) $\qquad B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le r\}\ (r>0)$



Für $-r\le\xi<r$ ist B_ξ eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2-\xi^2}$



$$\overset{2.6(iii)}{\Longrightarrow} |B_\xi| = \rho(\xi) = (r^2-\xi^2)\pi$$

$$\Longrightarrow\ |B| \overset{(ii)}{=} \int_{-r}^{r} (r^2-\xi^2)\pi\, d\xi = \pi\left(r^2\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{\xi=-r}^{\xi=r}$$

$$= \pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}r^3}}$$

[6] (a) Falsch, das Gegenbsp einer pktw. aber nicht glm. konv. Fktfolge, nämlich

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ spielt ja auf der kp Defmenge $[0,1]$! D

(b) Ja, denn jede CF konvergiert nach PKK und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.