Blatt 18: Funktionenfogen und -reihen

$\boxed{1}$ *Funktionenfolgen und punktweise Konvergenz.*
Betrachte die folgenden Funktionenfolgen auf den angegeben Definitionsbereichen. Fertige eine Skizze an (Computerunterstützung explizit erwünscht!) und bestimme den punktweisen Limes.

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$ (b) $f_n(x) = nxe^{-nx} \quad (x \in [0,\infty))$

(c) $f_n(x) = nxe^{-nx} \quad (x \in (-\infty, 0])$ (d) $f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad (x \in [0,\infty))$

$\boxed{2}$ *Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz, 1.*
Gegeben sind die beiden Funktionenfolgen auf $\mathbb{R}$

$$f_n(x) \;=\; \frac{nx}{1+n|x|}, \qquad g_n(x) \;=\; \arctan(nx).$$

Bearbeite die folgenden Punkte für f_n und g_n.

(a) Skizziere die Funktionenfolgen und bestimme ihren punktweisen Limes.

(b) Zeige, dass die Konvergenz *nicht* gleichmäßig ist. *Tipp:* Vo. $\boxed{5}$, 1.12(ii).

$\boxed{3}$ *Fehlende gleichmäßige Konvergenz explizit.*
Die in $\boxed{2}$(b) avisierte Argumentation, das Fehlen der gleichmäßigen Konvergenz zu zeigen, haben wir auch schon in Vo. $\boxed{5}$ 1.12(i) für x^n auf $[0,1]$ verwendet. Jetzt wollen wir uns mit Situationen befassen, wo diese Argumentation nicht greift, weil der punktweise Limes stetig ist. Dazu betrachten wir

$$f_n(x) = x^n \quad (x \in [0,1)), \qquad g_n(x) = \max(n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0)^1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bearbeite folgende Punkte für (f_n) und (g_n).

(a) Skizziere die Funktionenfolge, gib die Grenzfunktion an und überzeuge dich davon, dass sie stetig ist.

(b) Zeichne in der Skizze einen passenden „ε-Streifen" der Grenzfunktion ein und argumentiere anhand der Skizze, warum die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.

(c) *Beweise*, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist[2].

$\boxed{4}$ *Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz, 2.*
Gegeben sind die beiden Funktionenfolgen auf $\mathbb{R}$

$$h_n(x) \;=\; \max(n^2 - n^3|x - 1/n|, 0), \qquad k_n(x) \;=\; \cos^{2n}(x).$$

[1]Keine Panik: das ist nur eine komprimierte Schreibweise für die Funktionenfolge aus Vo. $\boxed{5}$ 1.4(ii)!

[2]Für (g_n) haben wir in Vo. $\boxed{5}$, Bsp. 1.8 bereits einen Beweis geführt. Versuche dich hier stärker an (b) zu orientieren, um ein etwas kürzeres Argument zu finden.

Bearbeite die folgenden Punkte für h_n und k_n.

(a) Skizziere die Funktionenfolgen und bestimme ihren punktweisen Limes.

(b) Zeige, dass die Konvergenz *nicht* gleichmäßig ist.

$\boxed{5}$ *Cauchy Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz.*
Beweise, dass für eine Funktionenfolge (f_n) auf $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt:
(f_n) konvergiert gleichmäßig $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N :\ \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$
Tipp: Was drückt die Bedingung auf der rechten Seite aus?

$\boxed{6}$ *Funktionenreihen, differenzieren und integrieren.*
Betrachte $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} e^{-nx}$ auf $[0, \infty)$.

(a) Zeige, dass $\sum_{n=1}^\infty f_n$ auf $[0, \infty)$ punktweise und gleichmäßig konvergiert.
Tipp: Satz v. Weierstraß, $\boxed{5}$, 1.17.

(b) Berechne $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\, dx$. *Tipp:* $\boxed{5}$ Prop. 1.20

(c) Für welche x konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$? *Tipp:* Quotiententest.

$\boxed{7}$ *Normeigenschaften von $\|\ \|_\infty$ und $\|\ \|_1$.*

(a) Zeige für $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$:
(N1) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ (positiv definit)
(N2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$ (homogen)
(N3) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (Dreiecksungleichung)

(b) Welche der Eigenschaften (N1)–(N3) gilt auch für $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$ (vgl. Vo. $\boxed{5}$ 1.13(iii)) und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar?

$\boxed{8}$ *Gleichmäßiger Limes und Integrieren.*
Betrachte die Funktionenfolge $(n \geq 1)$

$$f_n :\ [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) \ = \ \frac{x}{n^2}\, e^{-x/n}.$$

(a) Skizziere die Funktionenfolge und bestimme ihren punktweisen Limes.

(b) Zeige, dass $f_n \to 0$ gleichmäßig. *Tipp:* Zeige, dass f_n auf $[0, n]$ monoton wächst und auf $[n, \infty)$ monoton fällt. Berechne daraus das globale Maximum von f_n und damit $\|f_n\|_\infty$.

(c) Zeige, dass für alle n gilt, dass $\int_0^\infty f_n(x) dx = 1$.

(d) Insgesamt gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx, \text{ oder?}$$

Steht das nicht im Widerspruch zu $\boxed{5}$, Prop. 1.20? Versuche die Situation aufzuklären.
Tipp: Es sind zwei Grenzpozesse involviert. Beachte die Reihenfolge!

Roland Steinbauer, März 2013