Blatt 20: Taylor-Reihen

$\boxed{1}$ *Taylorpolynom explizit.* Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \sin(x).$$

(a) Bestimme das Taylorpolynom $T_3[f, 0]$ von f an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Bestimme die Lagrange-Form des Restglieds $R_4(x)$ und gib eine Abschätzung für $|R_4(x)|$ auf $[-1/2, 1/2]$ und auf $[-1, 1]$ an.

(c) Fertige eine Skizze des Graphen von $T_3[f, 0]$ und f an[1]. Ist T_3 eine gute Aproximation an f? Wo?

$\boxed{2}$ *Taylorpolynom explizit, 2.* Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^2(x).$$

(a) Bestimme das Taylorpolynom $T_3[f, 0]$ von f an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Bestimme die Lagrange-Form des Restglieds $R_4(x)$ und zeige die Abschätzung

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{48} \quad \text{für } x \in [0, 1/2]$$

Tipp: Additionstheoreme!

(c) Fertige eine Skizze des Graphen von $T_3[f, 0]$ und f an[1]. Ist T_3 eine gute Aproximation an f? Wo?

$\boxed{3}$ *Taylorentwicklung explizit.* Wir betrachten

$$f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\log(1 - \frac{x}{2}).$$

(a) Bestimme die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$.
Tipp: Hier musst du eine Formel für $f^{(n)}(x)$ finden. Stelle durch Inspektion der ersten Ableitungen eine Vermutung auf (educated guess) und beweise diese durch Induktion.

(b) Skizziere[1] die Graphen von $T_n[f, 0]$ für $n = 0, \ldots, 10$ sowie von f. Stelle aufgrund der Skizze eine Vermutung darüber auf, für welche x die Taylorreihe gegen f konvergiert.

(c) Gib das Restglied $R_{n+1}(x)$ in Lagrange-Form an.

(d) Versuche durch Abschätzen des Restglieds deine Vermutung aus (b) zu bestätigen.

---

[1] Hier ist Computerunterstützung gefragt!

$\boxed{4}$ *Taylorentwicklung explizit, 2.* Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x.$$

(a) Bestimme die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$. *Tipp:* Wie in Aufgabe $\boxed{3}$ (a).

(b) Skizziere[1] die Graphen von ausreiechend vielen $T_n[f, 0]$ für sowie von f auf passenden Intervallen $[-a, a]$. Stelle aufgrund dieser Skizzen eine Vermutung darüber auf, für welche x die Taylorreihe gegen f konvergiert.

(c) Gib das Restglied $R_{n+1}(x)$ in Lagrange-Form an.

(d) Versuche durch Abschätzen des Restglieds deine Vermutung aus (b) zu bestätigen.

$\boxed{5}$ *Umschreiben von Polynomen.*
Schreibe das Polynom

$$p(x) = 2(x + 2)^3 - 4(x + 2) - 1$$

in $x - 1$, d.h. schreibe p in der Form $p(x) = a_3(x - 1)^3 + a_2(x - 1)^2 + a_1(x - 1) + a_0$.
Tipp: Entwickle p in eine Taylor-Reihe um $x_0 = 1$.

$\boxed{6}$ *Wiedereinmal Sinus und Cosinus.*
Für die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ bearbeite die folgenden Punkte:

(a) Berechne die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$. Überrascht dich das Ergebnis? Warum, bzw. warum nicht?

(b) Skizziere die Graphen der ersten 10 Taylor-Polynome und die Grenzfunktion im Intervall $[-\pi, \pi]$, dann im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$[2]. Was fällt dir auf?

(c) Beantworte die folgenden Fragen (Argumente und Zitate, kein Beweise): Für welche x konvergiert die Taylor-Reihe? Konvergiert sie gegen f bzw. g? Konvergiert die Taylor-Reihe auch gleichmäßig? Wenn ja, auf welchen Mengen?

$\boxed{7}$ *Arcus-Tangens.*

(a) Zeige, für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}\,.$$

Tipp: Nach Vo. $\boxed{4}$ 2.11(v) gilt $\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ und der Integrand lässt sich leicht(!?!) als Reihe darstellen. Dann verwende Vo. $\boxed{5}$ Prop. 1.20.

(b) Zeige mit Hilfe von (a) die schon aus Vo. $\boxed{5}$ Z.6 bekannt Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots.$$

Tipp: $\tan(\pi/4) = 1$!

[2]Computerunterstützung explizit erwünscht!