Blatt 22: Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$

$\boxed{1}$ *Terminologie.*
Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{array}{lll} f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 & g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} & h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ f(t)=(2\sin(t),\cos(t),t) & g(x,y)=xy^2 & h(x,y)=(y,-x). \end{array}$$

Bearbeite die Folgenden Punkte:

(a) Plotte die Funktionen[1] auf einem „vernünftigen" Ausschnitt des Definitionsbereichs. Beschreibe den Graphen in Worten.

(b) Gib (inklusive Definitionsbereich und Zielmenge) folgende Funktionen an:
Die 2. Komponentenfunktion von f und die 1. Komponentenfunktion von h.
Die partielle Funktionen von g bei fixiertem $y = 3$ und bei fixiertem $x = 2$.
Die partielle Funktion von h bei fixiertem $y = 0$ und die partielle Funktion der ersten Komponente von h bei fixiertem $x = 0$.
Welche partiellen Funktionen können für f definiert werden? Welche Komponentenfunktionen hat g?

$\boxed{2}$ *Skalare Funktionen auf* $\mathbb{R}^2$*—Landschaften.*
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y)=x^2-y^2,\quad g(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2},\quad h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) Bestimme den maximal möglichen Definitionsbereich und plotte die Funktionen[1] auf einem „vernünftigen" Ausschnitt ihres Definitionsbereichs. Beschreibe die Graphen in Worten.

(b) Bestimme für f, g und h jeweils die partiellen Funktionen bei festgehaltenem $y = 0$ und $x = 0$. Zeichne deren Graphen in deine oben erzeugten Plots ein. Was fällt dir auf?

(c) Bestimme für f und g jeweils die partiellen Funktionen bei festgehaltenm $y = 1$ bzw. $x = 1$. Zeichne deren Graphen in deine oben erzeugten Plots ein. Was fällt dir auf?

$\boxed{3}$ *Vektorfelder.*
Plotte die beiden Vektorfelder $v(x,y) = (-x,|y|)$ und $w(x,y,z) = (-x,-y,0)$ auf einer „vernünftigen" Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ und beschreibe ihr Verhalten in Worten.

$\boxed{4}$ *„Kreativworkshop".*

(a) Gib je eine ebene Kurve, eine skalare Funktion auf $\mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ an und plotte sie.

[1] Die nötigen Erklärungen findest du im Mathematica-Notebook zu $\boxed{6}$ 2.4 Plotten von Funktionen unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem13/plot-3D.nb`.

Roland Steinbauer, Mai 2013

(b) Gib je eine skalare Funktion auf $\mathbb{R}^3$ sowie eine je eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an. Gib jeweils die partiellen Funktionen durch 0 an (also für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ etwa für fixes $y = 0$ und für fixes $x = 0$).

$\boxed{5}$ *Baukasten 1.*
Beweise (Vo. $\boxed{6}$ Bem. 2.10(i)), dass Linearkombinationen stetiger Funktionen wieder stetig sind. Genauer, zeige für $f, g : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m$ stetig in a.

$\boxed{6}$ *Stetig?*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Plotte die Funktion und zeige, dass sie auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.
Tipp: Für die Stetigkeit in $(0, 0)$ zeige mittels einer Abschätzung für $|f(x, y)|$, dass $f(x^{(k)}) \to 0$ falls $x^{(k)} \to (0, 0)$.

$\boxed{7}$ *Baukasten 2.*
Beweise (Vo. $\boxed{6}$ Bem. 2.10(ii)), dass die Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig ist. Genauer,

(a) formuliere das einschlägige Resultat exakt aus und

(b) beweise es.

$\boxed{8}$ *Partielle Stetigkeit vs. Stetigkeit.*
Betrachte folgende Variante des Peano-Beispiels $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+4y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
(Vo. $\boxed{6}$ 2.13). Plotte die Funktion und zeige, dass die partiellen Funktionen bei 0 stetig sind, f selbst aber unstetig bei $(0, 0)$.

Freiwillig: Falls du dich von obiger Funktion nicht herausgefordert fühlst, versuche es stattdessen mit folgender Variante

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Aufgrund des Plots bietet sich wieder $(1/k, 1/k)$ als „Versager-Nullfolge"an, für die $f(x^{(k)}) \to 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$ gilt. Für die technische Berechnung dieses Limes verwende die Exponentialreihe und ihre Fehlerabschätzung aus $\boxed{2}$ 4.42, also

$$\frac{e^{1/k^2} - 1}{2/k^2} = \frac{k^2}{2}(e^{1/k^2} - 1) = \frac{k^2}{2}(1 + 1/k^2 + R_2(1/k^2) - 1) = \frac{1}{2}(1 + k^2 R_2(1/k^2)) \leq \ldots$$

$\boxed{9}$ *Satz vom Maximum.*
Beweise Vo. $\boxed{6}$, Prop. 2.15(i), d.h., dass jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, wobei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, beschränkt ist und Maximum sowie Minimum annimmt.
Tipp: Verallgemeinere den Beweis aus der EidA ($\boxed{2}$ Thm. 2.11), verwende allerdings direkt die Kompaktheit statt des Satzes von Bolzano Weierstraß.

Roland Steinbauer, Mai 2013