Blatt 24: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

$\boxed{1}$ *Keine Zwischenstelle im MWS für vektorwertige Funktionen.*
In dieser Aufgabe bearbeiten wir ein Beispiel, das explizit zeigt, dass sich das Thm. in Vo. $\boxed{6}$ 4.2(ii) nicht auf Zielbereich $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$) verallgemeinern läßt (sogar falls $n = 1$ gilt).

Sei $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Zeige, dass es kein $\theta \in (0, 2\pi)$ mit $c(2\pi) - c(0) = 2\pi\, Dc(\theta)$ gibt.

$\boxed{2}$ *Taylorentwicklung explizit.*
Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion (vgl. Blatt 23 $\boxed{1}$)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{xy}$$

im Punkt $\xi = (0, 0)$ bis zur 2. Ordnung.

Versuche aus der Taylor-Formel zu erkennen, wie sich f nache ξ verhält. Plotte den Graphen von f nahe ξ und überprüfe, ob du recht hattest.

$\boxed{3}$ *Implizitensatz explizit—Folium cartesii.*
Wir studieren die Niveaumengen des sog. Folium cartesii

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Um dir einen Überblick zu verschaffen, plotte die Funktion f und ihre Niveaumengen im Bereich $[-2, 2]^2$.
Anmerkung: Die Niveaulinie zum Wert 0 hat eine besonders schöne Gestalt!

(b) Nahe welcher Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ garantiert der Satz über implizite Funktionen (Vo. $\boxed{6}$ 4.4(vi)) die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ nach y als differenzierbare Funktion von x?

(c) Wo in der (a) entsprechenden Teilmenge der $\mathbb{R}^2$ ergibt sich jeweils $y'(x)(= h'(x)$ in der Notation aus der Vo.)$= 0$?

(d) Was bedeutet die Bedingung $y'(x) = 0$ aus (c) geometrisch? Was bedeutet sie für die Höhenschichtlinien von f und für f selbst?
Tipp: Zeichne die in (c) gefundene Menge in deine Plots aus (a) ein!

$\boxed{4}$ *Implizit vs. explitzit.*
Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, sodass die Niveaumenge zum Wert 1 genau der Einheitskreis ist, also $N_f(1) = f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} =: S^1$.

Roland Steinbauer, Juni 2013

(a) In der Nähe welcher Punkte auf S^1 garantiert der Satz über implizite Funktionen, dass die Variable y als differenzierbare Funktion von x ausgedrückt (also nach y aufgelöst) werden kann? In der Nähe welcher Punkte kann nach x aufgelöst werden? Was ergibt der Satz hier jeweils als Ableitungen der „Auflösungen" $y'(x)$ bzw. $x'(y)$.

(b) Vergleiche die Ergebnisse aus (a) mit einer expliziten Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ nach y in den Bereichen $y \geq 0$, und $y < 0$.

$\boxed{5}$ *Polarkoordinaten.*
Betrachte (vgl. Blatt 23, Aufgabe $\boxed{5}$)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(a) In der Nähe welcher Punkte $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f eine differenzierbare Umkehrfunktion (und ist daher ein lokaler Diffeomorphismus)?

(b) Für $G := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ beschreibe die Bildmenge $W = f(G)$. Für einen fixen Punkt $W \ni (x, y) = f(r, \varphi)$ interpretiere die Größen r, φ geeignet als Radius und Winkel. Fertige eine Skizze an! Begründe anschaulich, warum f als Abbildung $f : G \to W$ bijektiv ist.

$\boxed{6}$ *Kugelkoordinaten.*
Betrachte (vgl. Blatt 23, Aufgabe $\boxed{5}$)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) In der Nähe welcher Punkte $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ besitzt f eine differenzierbare Umkehrfunktion (und ist daher ein lokaler Diffeomorphismus)?

(b) Für $G := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreibe die Bildmenge $W = f(G)$. Für einen fixen Punkt $W \ni (x, y, z) = f(r, \varphi, \theta)$ interpretiere die Größen r, φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z-Achse. Fertige eine Skizze an! Begründe anschaulich, warum f als Abbildung $f : G \to W$ bijektiv ist.

$\boxed{7}$ *Extremwertaufgaben.*
Für die folgenden skalaren Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ plotte jeweils Funktion und die Höhenschichtlinie um dir einen Überblick zu verschaffen und bestimme dann jeweils lokale Maxima und Minima. Zeichne die Extrema in deine Plots ein.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (Folium cartesii, vgl. Aufgabe $\boxed{3}$)

(b) $f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$

Roland Steinbauer, Juni 2013