[1] ANSCHLUSS AN DIE ANALYSIS-VORLESUNG: METRISCHE RÄUME 1 – DIE GRUNDLAGEN

[2 VO, CS ↓] 4.3.

1.1. MOTIVATION. In diesem Kapitel wiederholen wir die Grundlagen über metrische Räume aus der Analysis – vgl. VI §15-17 in [Hö]. Unser Ziel ist es dabei den Abstandsbegriff aus den Definitionen der Konvergenz und der Stetigkeit zu eliminieren und eine Beschreibung dieser Begriffe in rein topologischen Termen [Umgebungen, offene Mengen] vorzubereiten, die dann ab KAP 2 unser Hauptthema bildet. Allerdings werden wir auch sehen, dass nicht alle Begriffe, die in metrischen Räumen definiert werden können auf der rein topologischen Ebene funktionieren.

Wir beginnen damit die Spuren von TC^5 [topology, convergence, continuity, compactness, connectedness: Topologie, Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang] in den Analysis-Vorlesungen aufzudecken. Wir beziehen uns hier direkt auf [Hö; Günther Hörmann, Analysis-Skripten] und beginnen mit einer Begriffssammlung.

Begriffssammlung

Distanz, Abstand, Metrik

METRISCHE RÄUME

Konvergenz
Stetigkeit
offene/abg. Menge
kompakte Menge
Randpunkt
innerer Punkt
äußerer —"—
isolierter —"—
Häufungspunkt

einer Menge

Häufungswert
Grenzwert

einer Folge

TOPOLOGISCHE RÄUME

Cauchy-Folge
gleichmäßige Stetigkeit

METRISCHE/UNIFORME RÄUME

beschränkte Menge

TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME

Relation der Begriffe und Konzepte ($\xrightarrow{\text{allgemeiner}}$ / $\xleftarrow{\text{spezieller}}$)

$$\underbrace{(\mathbb{R}, |\ |)}_{\text{Analysis 1}} \subseteq \underbrace{(\mathbb{R}^n, \|\ \|)}_{\text{Analysis 2}} \subseteq \underbrace{\text{normierte Vektorräume} \subseteq \text{metrische VR}}_{\text{Funktionalanalysis}}$$

$$\underbrace{\subseteq \text{metrische Räume} \subseteq \text{uniforme R} \subseteq \text{topologische R}}_{\text{Topologie}}$$

Nun beginnen wir mit der Wiederholung der Grundbegriffe über metrische Räume. Für mehr Details siehe etwa [Hö, $\underline{\text{VI}}$, §15–§17], [Q, Kap 1].

1.2 DEF (Normierter Vektorraum) [Hö, 15.3]

Sei V ein Vektorraum (VR) über dem Körper $\mathbb{K}$ [$=\mathbb{R}, \mathbb{C}$]. Eine Abbildung

$$\|\ \|: V \to \mathbb{R}$$

heißt <u>NORM</u> auf V, falls gilt ($x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$)

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pos. definit)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (pos. homogen)

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ($\Delta$-Ungl.)

Wir nennen das Paar $(V, \|\ \|)$ [oder schlampig nur V] <u>normierten VR</u> [NVR].

1.3 DEF (Metrischer Raum) [Hö, 15.1]
Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

heißt METRIK (Abstandsfunktion) auf X, falls gilt
$(x, y, z \in X)$

(D1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (pos. definit)
(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrisch)
(D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Δ-Ungl.)

Wir nennen das Paar (X, d) [oder schlampig nur X] einen metrischen Raum [MR].

1.4 BSP (NVR & MR) [siehe auch UE, 2-4]
(i) Der $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] mit der Euklidischen Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2} \quad (\langle\ |\ \rangle \ldots \text{Standardskalarprod.})$$

$$\left[\ \|z\|_2 := \sqrt{\langle z | z \rangle} = \sqrt{\sum |z_i|^2} \quad \left(\langle x | y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i \quad \text{— " —}\right)\right.$$

ist ein NVR. In dieser Vorlesung werden wir – wenn nicht explizit anders gesagt wird – $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] immer mit der $\|\ \|_2$ versehen.

(ii) p-Norm: Auf $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & p = \infty \end{cases}$$

Damit wird $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] zu einem NVR [Hö, 15.6].

Im Fall $p=\infty$ sprechen wir auch von der Maximums-, Supremums- oder Unendlichnorm. Der Fall $p=2$ ist gerade (i).

(iii) (NVR $\to$ MR) Sei $(V, \| \ \|)$ ein NVR, dann ist

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf V. [Hö 15.4]

(iv) Die diskrete Metrik. Sei M eine beliebige Menge, dann ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf M, genannt diskrete Metrik. [Hö 15.2]

1.5 DEF (offene ε-Kugel) Sei (X,d) MR, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

(offene) ε-Kugel um x [Hö 15.7]
↳ Rechtfertigung in 1.16

1.6 DEF (Konvergenz) Sei (X,d) MR, $(x_n)_n$ Folge in X, $x \in X$.

$$x := \lim x_n \ :\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \underbrace{d(x_n,x) < \varepsilon}_{x_n \in B_\varepsilon(x)}$$

1.7 Motivation. Wir werden im Folgenden den Abstandsbegriff aus der Formulierung der Konvergenz eliminieren. Dabei begegnen wir zum ersten Mal dem Schlüsselbegriff der <u>Umgebung</u>. Er ist der Schlüssel, um Konvergenz ohne Rücksichtnahme auf eine Distanzmessung zu formulieren. [2. VO, CS ↓ / 3. VO, CS, 9.3. ↓]

1.8 DEF (Umgebung) Sei (X,d) MR, $x \in X$, $U \subseteq X$ heißt <u>Umgebung von x</u>, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

1.9. Beobachtung (zum Umgebungsbegriff)

(i) Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist also Umgebung von x.

(ii) Jede Obermenge einer Umgebung ist ebenfalls eine Umgebung

1.10 PROP (Limes mittels Umgebungen) [Hö 16.1] (X,d) MR

$$x = \lim x_n \iff \forall U \text{ Umgebung von } x \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ x_n \in U$$

<u>Beweis</u>

($\Rightarrow$) Sei U Umgebg von $x \overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon \ B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} \exists N \ \forall n \geq N \ x_n \in B_\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow x_n \in U$

($\Leftarrow$) Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist „ja eh schon" Umgebg v. x [1.9(i)] $\square$

1.11 MOTIVATION. Was uns eben mit der Konvergenz gelungen ist, versuchen wir nun mit der Stetigkeit – also eliminieren wir den Abstandsbegriff aus der Formulierung der Stetigkeit; wieder mittels des Begriffs der Umgebung. Zunächst aber die Def [Hö 16.7]

1.12 DEF (Stetigkeit) Sei $f:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ eine Abb zwischen MR. f heißt stetig in $x\in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X_1: \underbrace{d_1(x,x')<\delta}_{x'\in B_\delta(x)} \Rightarrow \underbrace{d_2(f(x),f(x'))<\varepsilon}_{f(x')\in B_\varepsilon(f(x))}.$$

$$\underbrace{\qquad x'\in B_\delta(x) \qquad\qquad f(x')\in B_\varepsilon(f(x)) \qquad}_{f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))}$$

$$\Updownarrow$$

$$B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

f heißt stetig auf X_1, falls f stetig in x $\forall x\in X_1$

1.13 PROP (Stetigkeit mittels Umgbg) $f:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ stetig in $x\in X_1$

$$\Longleftrightarrow \forall U \text{ Umg. von } f(x) \text{ ist } f^{-1}(U) \text{ Umgebung von } x$$

Beweis ($\Rightarrow$)

$$U \text{ Umgebung von } f(x) \overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists\varepsilon>0: B_\varepsilon(f(x))\subseteq U$$

$$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} \exists\delta>0: B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

$$\overset{1.8}{\Longrightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \text{ Umgebung von } x$$

$$\overset{1.9(iii)}{\Longrightarrow} f^{-1}(U)\supseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \text{ — " — }$$

($\Leftarrow$) Sei $\varepsilon > 0 \overset{1.10(i)}{\Longrightarrow} B_\varepsilon(f(x))$ Umgebung von $f(x)$

$\overset{\text{Voraus}}{\Longrightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umg. von x

$\overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \ B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$!]

<u>1.14 MOTIVATION</u>. Als nächstes wollen wir die Stetigkeit einer Fkt auf ganz X ohne Verwendung des Abstandsbegriffs fassen. Dabei tritt erstmals <u>der</u> Begriff der Topologie auf: die offene Menge. Zunächst die Def [Hö, 15.9]

<u>1.15 DEF.</u> $O \subseteq X$ MR heißt <u>offen</u>, falls

$$\forall x \in O: \ O \text{ ist Umg. v } x \ \left[\overset{1.8}{\Longleftrightarrow} \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq O\right]$$

[Um jedes $x \in O$ gibt es eine ganze „ε-Schutzkugel", die ganz in O liegt. Je näher x zum „Rand" von O liegt, desto kleiner muß ε sein.]

<u>1.16 PROP</u> $\boxed{\text{Jedes } B_\varepsilon(x) \text{ ist offen}}$ [Hö 15.10(i)]

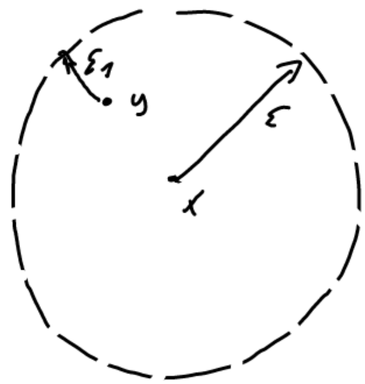
<u>1.17 BEM</u> (Zu offenen Mengen) [vgl Hö, 15.10–11]

(i) 1.16 besagt also, dass $B_\varepsilon(x)$ nicht nur Umgebung von x ist [1.10(i)], sondern auch $\forall y \in B_\varepsilon(x)$

(ii) $\emptyset$, X sind in jedem MR (X,d) offen.

(iii) Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, alle (a,b) und alle $\bigcup_{k=1} (a_k, b_k)$; das sind schon alle [o.B.]

Beweis 1.16. Sei $y \in B_\varepsilon(x)$. Setze $\varepsilon_1 := \varepsilon - d(x,y)$ (>0).



Dann ist $B_{\varepsilon_1}(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$, denn sei $z \in B_{\varepsilon_1}(y)$, dann gilt

$$d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon_1 + d(y,x)$$
$$= \varepsilon - d(x,y) + d(x,y) = \varepsilon \qquad \square$$

1.18 Prop (Stetigkeit via offene Mengen) Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$

f stetig auf $X_1 \iff \forall O$ offen in X_2 ist $f^{-1}(O)$ offen in X_1

Beweis $(\Rightarrow)$

O offen in X_2 [zz. $f^{-1}(O) \subseteq X_1$ offen $\iff \forall x \in f^{-1}(O) : f^{-1}(O)$ Umg. v. x]

Sei $x \in f^{-1}(O)$, d.h. $f(x) \in O$

$\overset{O \text{ offen}}{\Longrightarrow}$ O Umgebung von $f(x)$ $\overset{1.13}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(O)$ Umg von x

$(\Leftarrow)$ Sei $x \in X_1$, U Umg. von $f(x)$

$\overset{1.8}{\Longrightarrow}$ $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$; und $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq X_2$ offen (1.16)

$\overset{\text{Voraus}}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq X_1$ offen

außerdem $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ wegen $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$

$\overset{1.17(i)}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umgebung von x

$\overset{1.8(ii)}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umgebung von x. $\square$

[3. VO, CS ↓
4. VO, CS ↓ 11.3]

1.19. ZUSAMMENFASSUNG 1 Wir fassen zusammen in wie weit wir den Distanzbegriff wirklich aus den Formulierungen der Begriffe Konvergenz & Stetigkeit eliminiert haben. Sei (X,d) MR. Dann gilt

SPRACHE der MR

- U Umg. v. $x \in X \overset{1.8}{\iff} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$
- O offen $\overset{1.15}{\iff}$ O ist Umgebung aller ihrer Pkte
- $x = \lim x_n \overset{1.10}{\iff} \forall U$ (Umg v. x) $\underbrace{\exists N \ \forall n \geq N \ x_n \in U}_{x_n \text{ schließlich in } U}$

analog f. HW

[• x HW von $x_n \iff \forall U$ (Umg. v x) $\underbrace{\forall N \ \exists n \geq N \ x_n \in U}_{x_n \text{ immer wieder in } U}$

[UE, 9]]

- f stetig in $x \overset{1.13}{\iff} f^{-1}$(Umg v. $f(x)$) ist Umg v. x
- f stetig $\overset{1.18}{\iff} f^{-1}$(offen) ist offen

SPRACHE der TOPOLOGIE

Wir werden sehen

(i) Die Sprache der Topologie ist viel allgemeiner als die Sprache der MR; sie ermöglicht es über Konvergenz & Stetigkeit in viel allgemeineren Räumen als MR zu sprechen

(ii) Auch die anderen Begriffe der Begriffssammlung 1.1 in der Sprache formuliert werden können – Mit 2 Ausnahmen

1.20 BEM (CF & glm Stetigkeit sind keine top. Begriffe)

(i) Cauchy-Folgen können nicht in der Sprache der Top formuliert werden. Wieso das?

VERSUCH:

$$(x_n) \text{ CF} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m \geq N\ \underbrace{d(x_n, x_m) < \varepsilon}_{x_m \in B_\varepsilon(x_n)}$$

$$\iff \forall U \,(\text{Umg von } x_n \ \dots \ \text{HILFE, welches } n\,?$$

STOP: Alle x_n müssten Umgebungen gleicher Größe besitzen – Was aber heißt „gleich groß" oder auch „kleiner", „größer" bei Umgebungen verschiedener Pkte ohne Zuhilfenahme eines Abstandsbegriffs?

[Bei einem fixen Pkt x ist es ja klar

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \ \dots \ B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \ \dots \ U_1 \subseteq U_2 \ \dots \quad]$$

(ii) Ähnliches passiert beim Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit.

f glm stetig $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x'\ \underbrace{d_1(x,x') < \delta}_{x' \in B_\delta(x)} \implies \underbrace{d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon}_{f(x') \in B_\varepsilon(f(x))}$$

Wiederum bräuchten wir $\forall x$ Umg. vergleichbarer Größe – das geht aber nicht ohne Abstandsbegriff

(iii) Tatsächlich können Begriffe wie CF & glm Stetigkeit in etwas allgemeineren Räumen als $\mathbb{R}^n$ definiert werden: den UNIFORMEN RÄUMEN. Diese erlauben genau einen Vergleich von Umgebungen verschiedener Punkte ...

1.21 ZUSAMMENFASSUNG 2. (Spuren von TC^4)

(i) Wir haben bisher die Spuren von $\overline{TC}^2$ in den Analysis-Vorlesungen aufgedeckt

T ... topology: Umgebungen 1.8, offene Mengen 1.15
C ... convergence: Konvergenz 1.6, 1.10
C ... continuity: Stetigkeit 1.12, 1.13, 1.18

Wo sind aber die Spuren vom Rest, also C^3, C^4?

(ii) C^3... compactness. Das tritt z.B. im Satz vom Max auf

{ Jede stetige Fkt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nimmt auf dem (kompakten) Intervall $[a,b]$ Max & Min an. }

Dahinter steckt der folgende top. Satz.

[Stetige Bilder kp Mengen sind kp.]

Hier: $f([a,b])$ ist kp $\underset{[\text{Hö } 17.3]}{\overset{\text{Heine-Borel}}{\Longrightarrow}}$ beschr. & abg. wobei

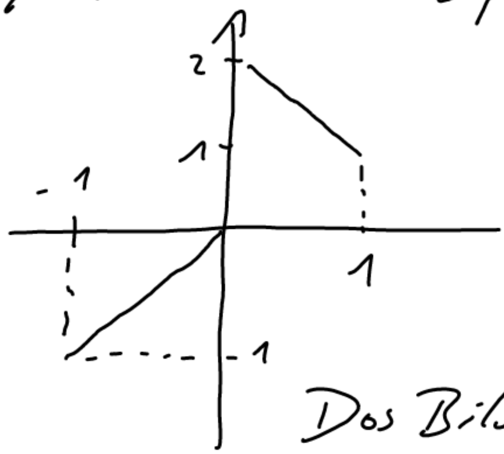
beschränkt $\Rightarrow$ $f([a,b])$ hat endliches sup & inf

abgeschlossen $\Rightarrow$ sup & inf gehören zu $f([a,b])$ sind also Max & Min

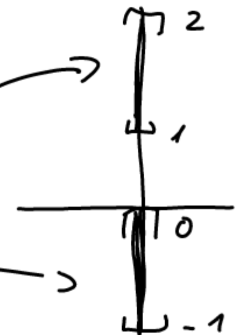
(iii) C^4... connectedness steckt z.B. im Zwischenwertsatz

Nimmt eine stetige Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall die Werte c, d $[c<d]$ an, so auch alle Werte zwischen c und d.

Zur Illustration ein Bsp einer unstetigen Fkt $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$



$f([-1,1]) = [-1,0] \cup [1,2]$



Das Bild $f([-1,1])$ „zerreisst" in 2 Stücke, obwohl der Defbereich $[-1,1]$ aus einem Stück besteht. Offenbar bedingt die Unstetigkeit dieses Zerreissen!

Der ZWS besagt also, dass das bei stetigen Fkt nicht passieren kann, also die Bildmenge nur aus einem Stück besteht, falls die Defmenge aus einem Stück besteht.

Dahinter steckt der top. Satz

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

[4. VO, CS
5. VO, RS 16.3]