[2] Topologische Räume

2.1. Einleitung. Wir haben in Kap [1] ausgehend vom Abstandsbegriff die Konzepte offene Menge bzw. Umgebung als Kern der topologischen Sprache entdeckt; Damit haben wir topologische Begriffe aus der Analysis ohne Bezugnahme auf einen Abstandsbegriff formuliert.

Nun drehen wir den Spieß um und geben ein Axiomensystem (Definition) für offene Teilmengen bzw. Umgebungen in beliebigen Mengen an. Diese Axiomensysteme sind sehr allgemein und erlauben es uns daher in sehr allgemeinen Situationen die Konzepte von Konvergenz und Stetigkeit zu formulieren — also Topologie zu betreiben.

Wir beginnen mit dem Axiomensystem für offene Mengen. Motivation dafür sind die Eigenschaften offener Mengen in $\mathbb{R}$; siehe [UE, 6].

2.2 Notation. Sei X eine Menge, dann bezeichnen wir mit 2^X die Potenzmenge von X (die Menge aller Teilmengen von X).

Eine Menge deren Elemente wiederum Mengen sind bezeichnen wir als Mengen-familie oder Mengensystem.

§2.1. Grundlegende Definitionen und Beispiele

2.3 Def (Topologie, topologischer Raum)

(i) Sei X eine Menge. Eine <u>Topologie auf X</u> ist eine Teilfamilie $\mathcal{O}$ von 2^X mit den Eigenschaften

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(O2) Beliebige Vereinigungen von $\mathcal{O}$-Mengen liegen wieder in $\mathcal{O}$, d.h.

$$O_i \in \mathcal{O} \;\forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(O3) Endliche Durchschnitte von $\mathcal{O}$-Mengen liegen wieder in $\mathcal{O}$, d.h.

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

(ii) Ein <u>topologischer Raum</u> (TR) ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Top. auf X ist.

(iii) Die Teilmengen O von X, die zu $\mathcal{O}$ gehören heißen <u>offen</u>. Die Komplemente offener Mengen heißen <u>abgeschlossen</u>. [d.h. $A \subseteq X$ abg. $:\Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{O}$]

2.4 BSP (Bsp TR)

(i) Jede MR (X,d) wird zum TR mittels der Def

$$\mathcal{O} := \{O \subseteq X \mid \underbrace{\forall x \in O\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O}_{O \text{ offen im Sinne von } 1.15.}\}. \quad (*)$$

Tatsächlich gelten (O1)-(O3) wegen [UE, 6].

(ii) Ein Spezialfall von (i): Jede Teilmenge A eines NVR $(V, \|\ \|)$ wird mittels $d(x,y) = \|x-y\|$ und $(*)$ zum TR.

(iii) Ein Spezialfall von (ii): Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit $|\ |$ bzw. $\|\ \|_2$ ist TR. Die so entstehende Topologie heißt die natürliche Top. $\mathcal{O}_n$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. [Die offenen Mengen sind gerade die offenen Mengen im Sinne der Analysis]

(iv) Auf $\mathbb{R}$ ist die Menge aller offenen Intervalle der Form $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ eine Top. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_<$ [Beweis: UE, 10]

(v) Die kofinite Topologie auf einer bel. Menge X ist definiert durch

$$\mathcal{O}_{co} := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \emptyset.$$

[Beweis: UE 10]

2.5 Bsp (Extremfälle von Top.)

Sei X eine beliebige Menge.

(i) Die diskrete Topologie ist definiert als $\mathcal{O}_{dis} = 2^X$, d.h. jede Teilmenge von X ist offen.

(ii) Die Klumpentopologie oder triviale Top. $\mathcal{O}_{Kl} = \{\emptyset, X\}$, d.h. nur X und $\emptyset$ sind offen.

[In beiden Fällen ist (O1) - (O3) klar!]

2.6 Bem (Vergleich von Top.)

Da Tops. Teilmengen von 2^X sind, kann man die Tops. auf einer fixen Menge X der Größe nach vergleichen. So gilt z.B. für jede Top $\mathcal{O}$ auf X

$$\mathcal{O}_{Kl} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{dis}.$$

Wir schreiben meist $\leq$ statt $\subseteq$ d.h. wir definieren

$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \quad :\Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 .$$

Wir sagen dann $\mathcal{O}_1$ ist gröber als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ ist feiner als $\mathcal{O}_1$. Die feinere Top. hat mehr offene Mengen (dafür typischerweise "kleinere" offene Mengen) als die gröbere Top.

$\leq$ ist eine Ordnung (refl. trans. antisym. Relation)

auf der Menge der Tops auf einer fixen Menge X;
Aber keine Totalordnung (d.h. im Allgemeinen sind zwei Tops auf X nicht vergleichbar; siehe [UE 12]).

§2.2. BASIS UND SUBBASIS EINER TOP

2.7 MOTIVATION (Weniger Arbeit / mehr Flexibilität beim Angeben von Tops)

Bisher haben wir Topologien durch Angabe des gesamten Systems der offenen Mengen festgelegt; das ist für viele Zwecke unhandlich und es stellt sich die Frage, ob es nicht ausreichend ist eine kleinere Familie von 2^X anzugeben, die dann bereits $\mathcal{O}$ festlegt.

So ein Mechanismus würde Arbeit ersparen und die Flexibilität erhöhen; z.B. kann so die gröbste / feinste Top angegeben werden, die gewisse Eigenschaften hat [vgl. [J] p. 14].

Die diesbezüglichen Schlüsselbegriffe sind

2.8 DEF (Basis, Subbasis) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R.

(i) Eine Teilfamilie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$ heißt Basis von $\mathcal{O}$, falls jedes $O \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

(ii) Eine Teilfamilie $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}$ heißt Subbasis von $\mathcal{O}$, falls die Familie $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ ($S_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$) Basis von $\mathcal{O}$ ist.

2.9 BEM (Basis, Subbasis)

(i) Eine Basis ist also eine Familie, die immerhin so reichhaltig ist, dass jede offene Menge Vereinigung von Basismengen ist, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}$: $O = \bigcup_{i \in I} B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}$, I passend.
Wir verwenden hier die Konvention $\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$.

(ii) Alternative Charakterisierung von Basen

$$\forall O \in \mathcal{O}: O = \bigcup_{i \in I} B_i \ (B_i \in \mathcal{B}) \iff \forall O \in \mathcal{O}\ \forall x \in O\ \exists B_x \in \mathcal{B}: \quad x \in B_x \subseteq O$$

($\Rightarrow$) $O = \bigcup_{i \in I} B_i$, $x \in O \Rightarrow \exists i_0 : x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = O$

($\Leftarrow$) $O = \bigcup_{x \in O} B_x$ oder $O = \emptyset \left[= \bigcup_{i \in \emptyset} B_i\right]$

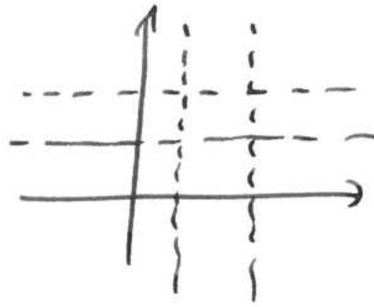
(iii) Eine Subbasis ist eine Familie, die immerhin so reichhaltig ist, dass jede offene Menge als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Subbasismengen geschrieben werden kann, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}$: $O = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ mit $S_{ij} \in \mathcal{S}$, I, $n_i \in \mathbb{N}$ passend.
Wir verwenden hier die Konvention $\bigcap_{i \in \emptyset} B_i = X$

2.10 Bsp (Basis, Subbasis)

(i) Basis für die triviale Top ist $\{X\}$
— " — diskrete — " — $\{\{x\} \mid x \in X\}$
— " — natürliche Top auf $\mathbb{R}$ sind die offenen Intervalle
— " — $\mathbb{R}^n$ — " — Kugeln
Aber auch die offenen Kugeln mit rationalem Radius

und rationalen Mittelpunktskoordinaten — und davon gibt es nur abzählbar viele! [Beweis UE]

(ii) Eine Subbasis für die natürliche Top auf $\mathbb{R}^2$ sind die offenen Streifen



2.11 SATZ (Grundeigenschaften von Basen) Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R. und $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{O}$. Dann gilt

(B1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

(B3) $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}\ \forall x\in B_1\cap B_2\ \exists B_3\in\mathcal{B}:\ x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$

Beweis: (B1) $X \underset{X \text{ offen}}{=} \bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq X$

(B3) $B_1,B_2\in\mathcal{B},\ x\in B_1\cap B_2 \overset{(O3)}{\Longrightarrow} B_1\cap B_2$ offen $\overset{2.9(ii)}{\Longrightarrow} \exists B_3\in\mathcal{B}:$
$x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$

$\square$

Durch die Vorgabe einer Basis ist $\mathcal{O}$ nun tatsächlich festgelegt (vgl. 2.7) — und zwar eindeutig...

2.12 SATZ (Top via Basis)

Sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ ein Teilsystem von 2^X, das (B1), (B3) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{O} := \Big\{\bigcup_{i\in I} B_i \;\Big|\; B_i\in\mathcal{B},\ I \text{ beliebig}\Big\}$$

eine Topologie auf X. $\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

<u>Beweis:</u> (O1): $\bigcup_{i\in\emptyset} B_i = \emptyset \in \mathcal{O}$ (nach Konvention)

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \overset{(B1)}{=} X \in \mathcal{O}$$

(O2): $O_i \in \mathcal{O}\ (i\in I) \Longrightarrow O_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}\ \ (B_{ij}\in\mathcal{B})$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} B_{ij} \in \mathcal{O}$$

(O3): $O_1,\dots,O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow O_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}\ \ (B_{ij}\in\mathcal{B})$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j\in J_i} B_{ij} \overset{(DG)}{=} \bigcup_{\substack{j_i\in J_i\\ i=1,\dots,n}} B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}$$

Sei $x\in B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n} \xRightarrow[+\text{Induktion}]{(B3)} \exists B_x \in \mathcal{B} : x\in B_x \subseteq B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}$

$$\Longrightarrow B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n} = \bigcup_{x\in B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}} B_x \in \mathcal{O}$$

$$\overset{(O2)}{\Longrightarrow} \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

$\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ direkt aus der Def von $\mathcal{O}$.

Jede Topologie $\mathcal{O}'$ auf X mit Basis $\mathcal{B}$ besteht genau aus den $\bigcup_{i\in I} B_i$ und ist somit gleich $\mathcal{O}$. $\square$

<u>2.12 ABem</u>

Auch Subbasen "regeln" Topologien fest, mit dem zusätzlichen "Zuckerl", dass Subbasen keine Grundeigenschaften haben. (außer per Konvention $\bigcap_{i\in\emptyset} S_i = X$). Also definieren beliebige Teilsysteme von 2^X als Subbasen eindeutig eine Top; genauer

2.13 Satz (Top via Subbasis) Sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ ein (BELIEBIGES?) Teilsystem von 2^X. Dann ist

$$\mathcal{O} := \Big\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij} \;\Big|\; S_{ij} \in \mathcal{S} \Big\}$$

eine Topologie auf X. $\mathcal{S}$ ist Subbasis für $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ Top auf X ist reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{B} := \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} S_j \;\Big|\; S_j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \Big\}$ die Eigenschaften (B1), (B3) erfüllt. Den Rest besorgt dann Satz 2.12.

(B1): $\bigcap_{j\in\emptyset} S_j = X \in \mathcal{B}$

(B3) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$; setze $B_3 = B_1 \cap B_2$

$[\Rightarrow x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2\ ]$

$\mathcal{S}$ ist Subbasis von $\mathcal{O}$ nach Definition. Jede Topologie $\mathcal{O}'$, die $\mathcal{S}$ als Subbasis besitzt besteht genau aus den Mengen $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ ist also gleich $\mathcal{O}$. $\square$

2.14 BEM (Zu den Konstruktionen: Subbasis $\rightsquigarrow$ Basis $\rightsquigarrow$ Topologie)

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\bigcap_{i=1}^{n}} \mathcal{B} \xrightarrow{\bigcup_{i\in I}} \mathcal{O}$$

SUBBASIS	BASIS	TOPOLOGIE
leer$^{\circledast}$?	(B1) $X \in \mathcal{B}$ $^{\circledast}$	(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
		(O2) $\bigcup_{i\in I}$
	(B3) $\bigcap_{i=1}^{n}$	(O3) $\bigcap_{i=1}^{n}$

Eig:

$\circledast$ $X := \bigcap_{i=1}^{0} S_i$ (per Konv)

$\bigcap_{i=1}^{n}$ tritt nicht auf, da in Konstruktion $\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ eingebaut

$\circledast$ $\emptyset := \bigcup_{i\in\emptyset} B_i$

$\bigcup_{i\in I}$ tritt nicht auf, da in die Konstruktion $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ eingebaut.

2.15 Bsp (Produkt- und Boxtopologie) $(X_i,\mathcal{O}_i)$ $i\in I$ top. Räume

(i) Wir definieren auf $X := \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i\in X_i\}$

die Produkttopologie als die von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \Big\{ S = \prod_{i\in I} Y_i \;\Big|\; Y_i = X_i \ \forall i\in I \text{ mit Ausnahme eines einzigen } i_0\in I;\ \text{für dieses sei } Y_{i_0}\in\mathcal{O}_{i_0} \text{ beliebig} \Big\}$$

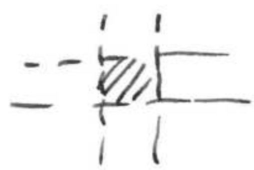
erzeugte Top.

•) Ist $X=X_1\times X_2$, dann sehen die Mengen in $\mathcal{S}$ so aus:

•) Wie sieht die Basis zugehörige Basis $\mathcal{B}_{Prod}$ d. Produkttop aus?

(a) I endlich: die typischen Basismengen sind "offene Quader" $\prod_{i\in I} Y_i$, $Y_i\in\mathcal{O}_i$

(b) I unendlich: die typischen



Basismengen sind "offene Quader" von denen nur endlich viele $Y_i\neq X_i$ sind; in "fast allen" Richtungen ist $Y_i=X_i$.

Diese Quader sind "sehr groß" - also auch die offenen Mengen der Produkttop.

Warum nicht alle Quader $\prod_{i\in I} Y_i$ ($Y_i\in\mathcal{O}_i$ beliebig) genommen werden beantwortet

(ii) Wir definieren auf $\prod_{i\in I} X_i$ die <u>Boxtopologie</u> als die von der Basis

$$\mathcal{B}_{Box} := \Big\{ \prod_{i\in I} Y_i \;\Big|\; Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig} \Big\}$$

erzeugte Top. (Beweis ÜE)

•) Ist $|I|<\infty$ dann gilt: $\mathcal{B}_{Prod} = \mathcal{B}_{Box} \Rightarrow \mathcal{O}_{Prod} = \mathcal{O}_{Box}$

•) Ist I unendlich dann: $\mathcal{B}_{Box} \supsetneq \mathcal{B}_{Prod} \Rightarrow \mathcal{O}_{Box} \supsetneq \mathcal{O}_{Prod}$

Im Allgemeinen ist die Boxtopologie also <u>feiner</u> als die Produkttopologie!

[In gewisser Weise ist die Boxtop zu fein, um nützlich zu sein; in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x=(x_1,x_2,\dots) \mid x_i\in\mathbb{R}\}$ dem Raum der reellen Folgen mit $\mathcal{O}_{Box}$ gilt: $\frac{1}{n}x \not\to 0$ $(n\to\infty)$

Somit wäre $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{Box})$ kein topologischer VR!

Das Box-Produkt kp Mengen ist i.A. nicht kp.!]

§2.3 UMGEBUNGEN

<u>2.16 MOTIVATION + ANKÜNDIGUNG</u>: In diesem § befassen wir uns mit dem zentralen Begriff der <u>Umgebung</u> in t.R. Insbesondere werden wir sehen, dass auch die Vorgabe von "Umgebungssystemen" resp "Umgebungsbasen" eine Top. festlegen (analog Basis/Subbasis ...).

2.17 DEF (Umgebung(ssystem)) Sei $(X,\mathcal{O})$ tR und $x\in X$.

(i) $U\subseteq X$ heißt Umgebung von x $:\Leftrightarrow \exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U$

(ii) Die Familie $\mathcal{U}_x := \{V\subseteq X \mid V \text{ Umgebung von } x\}$ [vgl. 1.12] heißt Umgebungssystem von x (bzgl $\mathcal{O}$).

2.18 PROP $(X,\mathcal{O})$ tR. $G\subseteq X$:

$$G \text{ offen (dh } G\in\mathcal{O}) \Leftrightarrow \forall x\in G: G\in\mathcal{U}_x$$

(Eine Menge ist genau dann offen wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist; vgl. 1.15.)

Beweis: "$\Rightarrow$" $G\in\mathcal{O}, x\in G \Rightarrow x\in G\subseteq G \overset{2.17(ii)}{\Rightarrow} G\in\mathcal{U}_x$

"$\Leftarrow$" Sei $x\in G \Rightarrow G\in\mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Rightarrow} \exists O_x\in\mathcal{O}: x\in O_x\subseteq G$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{x\in G}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in G} O_x \subseteq G \Rightarrow G = \bigcup_{x\in G} O_x \overset{(O2)}{\Rightarrow} G\in\mathcal{O}$$

$\square$

2.19 KOR Jede Umgebung U von x enthält eine offene Umgebung V von x. [Bemerke 2.17(i) verlangt nicht, dass Umgebungen selbst offen sind!]

Beweis: Setze $V := O$ aus 2.17(i). $\rightarrow$ V offen und $x\in V$. Nach 2.18 ist daher V Umgebung von x.

$\square$

2.19A. Satz (Grundeigenschaften von Umgebungssystemen)

Sei $(X,\mathcal{O})$ tR. Für die Umgebungssysteme $\mathcal{U}_x$ $(x\in X)$ gilt dann

(U1) $\forall U\in \mathcal{U}_x: x\in U$

(U2) $U_1, U_2\in \mathcal{U}_x \Rightarrow U_1\cap U_2 \in \mathcal{U}_x$

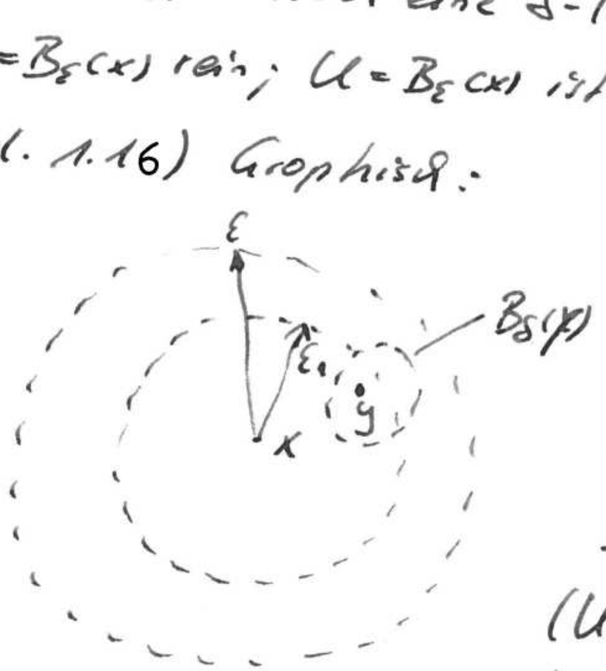
(U3) $U\in \mathcal{U}_x \wedge V\supseteq U \Rightarrow V\in \mathcal{U}_x$

(U4) $\forall U\in \mathcal{U}_x\ \exists V\in \mathcal{U}_x: V\subseteq U \wedge \forall y\in V: U\in \mathcal{U}_y$

2.20 Bem (Bedeutung von (U4)),

Die anschauliche Bedeutung von (U1)–(U3) sollte klar sein. (U4) wird in Beweisen als Ersatz für die △-Ungl in MR verwendet:

„Gegeben $U=B_\varepsilon(x)$ und $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, dann passt für jedes $y\in V=B_{\varepsilon_1}(x)$ noch eine δ-Kugel $B_\delta(y)$ um y in $U=B_\varepsilon(x)$ rein; $U=B_\varepsilon(x)$ ist also Umgebung von y" (vgl. 1.16) Graphisch:



Im Fall von MR und ε-Kugeln ist die Verkleinerung allerdings ein „Luxus", da alle B_ε ja schon offen sind. Im Kontext von (U4) sollte eher an allg. Umgebungen gedacht werden. □

Beweis von 2.19A

(U1) $U\in\mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U \Rightarrow x\in U$

(U2) $U_1,U_2\in\mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O_1,O_2\in\mathcal{O}: x\in O_1\subseteq U_1,\ x\in O_2\subseteq U_2$

$\Longrightarrow x\in O_1\cap O_2\subseteq U_1\cap U_2$

Wegen (O3) ist $O_1\cap O_2\in\mathcal{O} \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} U_1\cap U_2\in\mathcal{U}_x$

(U3) $U\in\mathcal{U}_x, V\supseteq U \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U\subseteq V \Rightarrow V\in\mathcal{U}_x$

(U4) $U\in\mathcal{U}_x \Rightarrow \exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U$; setze $V:=O$

$\overset{2.18}{\Longrightarrow} V\in\mathcal{U}_y\ \forall y\in V \overset{(U3)}{\Longrightarrow} U\in\mathcal{U}_y\ \forall y\in V$

2.21 Satz (Topologie via Umgebungssysteme)

Sei X eine Menge. Für jedes $x\in X$ sei ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{V}_x\subseteq 2^X$ gegeben, das (U1)–(U4) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{O\subseteq X \mid \forall x\in O: O\in\mathcal{V}_x\} \quad \text{(was sonst?)}$$

eine Topologie auf X. Für jedes $x\in X$ ist $\mathcal{V}_x$ gerade das $\mathcal{O}$-Umgebungssystem von x und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis von 2.21. Zunächst ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, denn

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, da $\forall x \in \emptyset \Rightarrow$ "alles"
$X \in \mathcal{O}$: $\mathcal{V}_x \neq \emptyset \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}_x \xRightarrow{(U3)} X \in \mathcal{V}_x$

(O2) $O_i \in \mathcal{O}$ $\forall i \in I$; sei $x \in \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists i_0 : x \in O_{i_0}$
$\Rightarrow O_{i_0} \in \mathcal{V}_x \xRightarrow{(U3)} \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

(O3) $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}$; sei $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i \Rightarrow \forall i : x \in O_i \Rightarrow$
$\forall i : O_i \in \mathcal{V}_x \underset{\text{Induktion}}{\xRightarrow{(U2)}} \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$

Wir zeigen nun $\mathcal{U}_x^{\mathcal{O}} = \mathcal{V}_x$ (also das $\mathcal{O}$-Umgebungssystem bei x ist gerade das gegebene $\mathcal{V}_x$).

Sei $\underline{U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}} \xRightarrow{2.17} \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subseteq U \xRightarrow{\text{Def } \mathcal{O}} O \in \mathcal{V}_x$
$\xRightarrow{(U3)} \underline{U \in \mathcal{V}_x}$

Sei $U \in \mathcal{V}_x$; definiere $\mathring{U} := \{y \in U \mid U \in \mathcal{V}_y\}$. Wir zeigen, dass $x \in \mathring{U}$ und $\mathring{U} \in \mathcal{O}$; damit folgt dann $U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}$.

- $x \in U$ (wegen (U1)) $\Rightarrow x \in \mathring{U}$
- Sei $y \in \mathring{U} \subseteq U \xRightarrow{(U4)} \exists V \in \mathcal{V}_y : V \subseteq U \wedge \forall z \in V : U \in \mathcal{V}_z$
$\Rightarrow V \subseteq \mathring{U} \xRightarrow{(U3)} \mathring{U} \in \mathcal{V}_y \ \forall y \in \mathring{U} \xRightarrow{\text{Def } \mathcal{O}} \mathring{U} \in \mathcal{O}$

Sei schließlich $\mathcal{O}'$ Top auf X mit $\mathcal{U}_x^{\mathcal{O}'} = \mathcal{V}_x$, dann gilt
$U \in \mathcal{O} \overset{2.18}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U : U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}} = \mathcal{V}_x = \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}'} \overset{2.18}{\Longleftrightarrow} U \in \mathcal{O}'$.

$\square$

2.22 BEM In der Praxis werden jedoch oft nicht die Umgebungssysteme $\mathcal{U}_x$ vorgegeben [in MR alle Obermengen von $B_\varepsilon(x)$] sondern ein Teilsystem davon – die sog. <u>Umgebungsbasen</u> [in MR: $B_\varepsilon(x)$ oder auch nur $B_{\frac{1}{n}}(x)$]. Dies führt uns zu

2.23 DEF Sei $(X,\mathcal{O})$ tR, $x\in X$. Ein Teilsystem $\mathcal{W}_x$ von $\mathcal{U}_x$ heißt <u>Umgebungsbasis</u> (bzgl. $\mathcal{O}$) bei x, falls

$$\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists W\in\mathcal{W}_x:\ (x\in)\, W\subseteq U$$

2.24 SATZ (Grundeigenschaften von Umgebungsbasen)
Sei $(X,\mathcal{O})$ tR. Für die Umgebungsbasen $\mathcal{W}_x$ $(x\in X)$ gilt dann

(UB1) $\forall W\in\mathcal{W}_x:\ x\in W$ $\qquad (=U1)$

(UB2) $\forall W_1,W_2\in\mathcal{W}_x\ \exists W_3\in\mathcal{W}_x:\ W_3\subseteq W_1\cap W_2$

(UB4) $\forall W\in\mathcal{W}_x\ \exists V\in\mathcal{W}_x:\ V\subseteq W \wedge \forall y\in V\ \exists W_y\in\mathcal{W}_y: W_y\subseteq W$

<u>Beweis</u> [UE]

2.25 SATZ (Top via Umgebungsbasen)

Sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{V}_x \subseteq 2^X$ gegeben, das (UB1)–(UB4) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{U}_x := \{U \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{V}_x : (x \in) V \subseteq U\}$$

ein Umgebungssystem für eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X.
Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis (bzgl. $\mathcal{O}$) bei x und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

NICHT VORGETRAGEN

Beweis: Wir zeigen zunächst (U1)–(U4).

(U1) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V \subseteq U \ V \in \mathcal{V}_x \overset{(UB1)}{\Longrightarrow} x \in V \Rightarrow x \in U$

(U2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{V}_x : \ x \in V_i \subseteq U_i \ (i = 1, 2)$

$$\overset{(UB2)}{\Longrightarrow} \exists V_3 \in \mathcal{V}_x : V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$$

$$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$$

(U3) $U \in \mathcal{U}_x, \ V \supseteq U \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x : W \subseteq U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

(U4) $U \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x \ (x \in) W \subseteq U$

$$\overset{(UB4)}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{V}_x : \underset{\cap\!|\;\; U}{V \subseteq W} \wedge \forall y \in V \ \underbrace{\exists W_y \in \mathcal{V}_y : W_y \subseteq W}_{\Leftrightarrow W \in \mathcal{U}_y}$$

$$\Longrightarrow \exists V \in \mathcal{U}_y : V \subseteq U \wedge \forall y \in V : U \in \mathcal{U}_y$$

Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ und per def. von $\mathcal{U}_x$ ist $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis bei x.
Offenbar ist $\mathcal{U}_x$ das einzige Umgebungssystem für das $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis ist; somit ist auch $\mathcal{O}$ eindeutig. $\square$

2.26 Bsp (Umgebungsbasen)

(i) Sei $(X,\mathcal{O})$ TR. Nach 2.19. bilden die offenen Umgebungen eine Umgebungsbasis.

(ii) Sei (X,d) MR; für $x\in X$ definiere

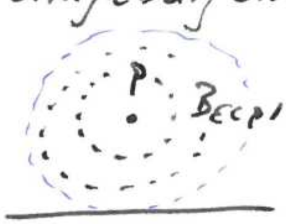
$$\mathcal{V}_x := \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0 \}.$$

Dann erfüllen die $\mathcal{V}_x$ (UB1)(UB2)(UB4) [Beweis, ÜE] die offenen ε-Kugeln sind also eine Umgebungsbasis (bzgl. der von der Metrik erzeugten Topologie).

(iii) Der Niemytzki-Raum

Sei $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$ (obere Halbebene)

Wir geben für jedes $p=(a,b) \in X$ eine Umgebungsbasis an



$b>0$: $\mathcal{W}_p = \{ B_\varepsilon(p) \mid 0 < \varepsilon \leq b \}$

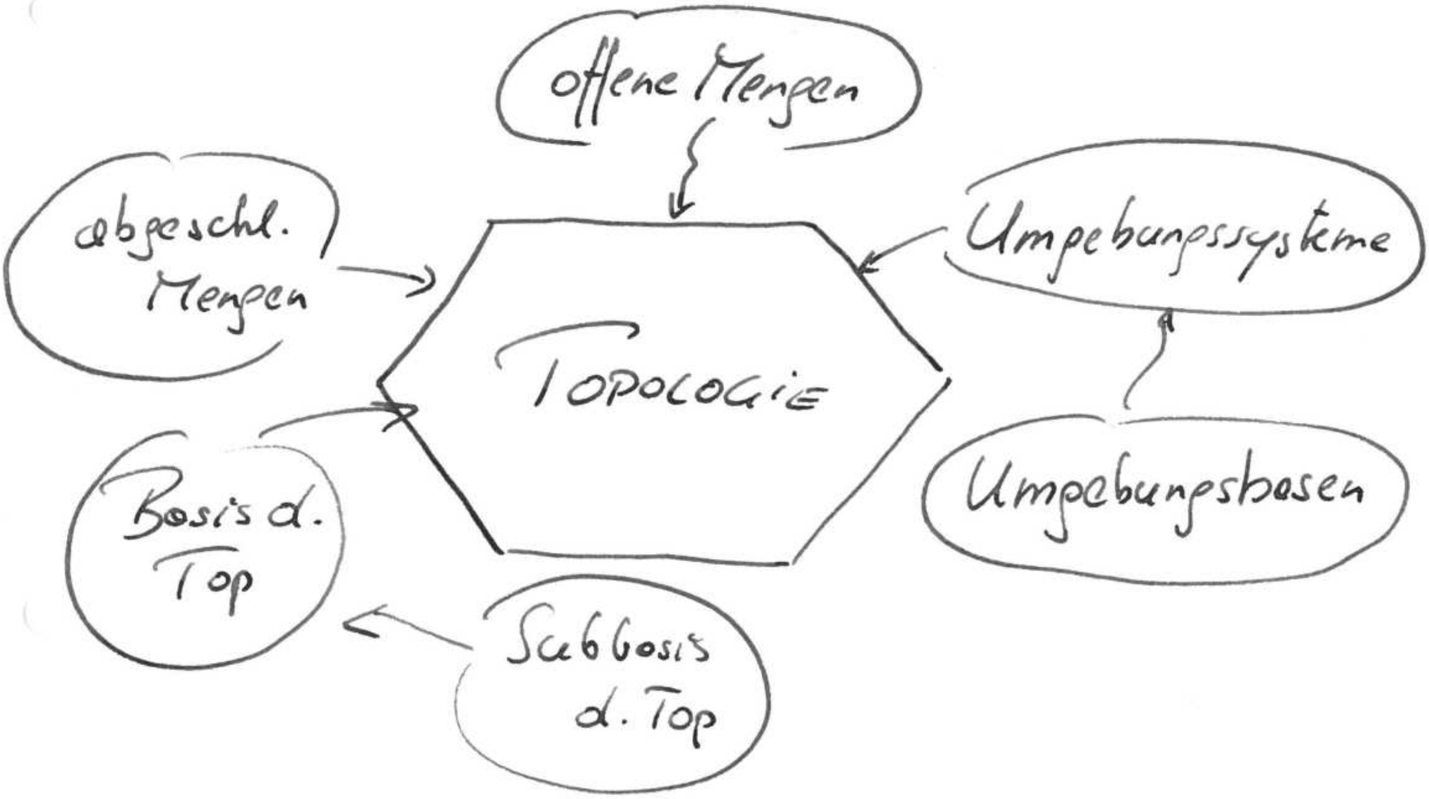
$b=0$: $\mathcal{W}_p = \{ C_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0 \}$

wobei $C_\varepsilon(p) = \{ q=(x,y) \in X \mid d(m,q) < \varepsilon \} \cup \{p\}$
und $m = (a,\varepsilon)$

(UB1)-(UB4) sind tatsächlich erfüllt (Beweis ÜE). Die so entstehende Topologie heißt Niemytzki-Topologie.

2.27 BEM (Der 6 bis 11-fache Pfad zur Topologie)

Wir haben neben der ursprünglichen Definition (offene Mengen) 2.3(ii) fünf weitere Zugänge kennengelernt, eine Topologie zu definieren. Dabei wurde jeweils ein Teilsystem von 2^X durch gewisse Axiome/Eigenschaften ausgesondert und gezeigt, dass dieses eindeutig eine Topologie festlegt



Genauer sind wir so vorgegangen

(1) Wir haben mit einem Ausgangsbegriff $\mathcal{A}$ begonnen, der mittels der Axiome (A1)-(Ak) definiert ist.

② Für ein gegebenes Objekt vom Typ $\mathcal{A}$ definieren wir einen weiteren Begriff $\mathcal{B}$

③ Wir zeigen für $\mathcal{B}$ gewisse Grundeigenschaften (B1)-(Bℓ).

④ Wir drehen den Spieß um und ernennen (B1)-(Bℓ) zu neuen Axiomen und betrachten Objekte, die (B1)-(Bℓ) erfüllen unabhängig von $\mathcal{A}$. Ausgehend von einem solchen $\mathcal{B}$-Objekt konstruieren wir ein Objekt, das (A1)-(Ak) erfüllt und zeigen, dass die Konstruktion aus ② wieder zum ursprünglichen $\mathcal{B}$-Objekt zurückführt.

Außerdem ist die durch das $\mathcal{A}$-Objekt bestimmte Topologie eindeutig.

Konkret etwa:

① Topologie (O1)-(O3); 2.3.	Basis 2.8, 2.11
② Umgebungssysteme 2.17	Subbasis 2.8.
③ (U1)-(U4) 2.19	keine? (Konv. $\bigcap_{i\in\emptyset} S_i = X$) 2.12A
④ Satz 2.21.	Satz 2.13
Gegeben $\mathcal{U}_x \ldots \mathcal{O}$	Gegeben $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{O}$
	Beweis 2.13 Satz 2.12

Die fehlenden 5 Zugänge sind

Abschlussoperator (Bem 2.41); Umgebungssubbasis;
Basis der abg. Mengen; Subbasis der abg. Mengen; int-Operator