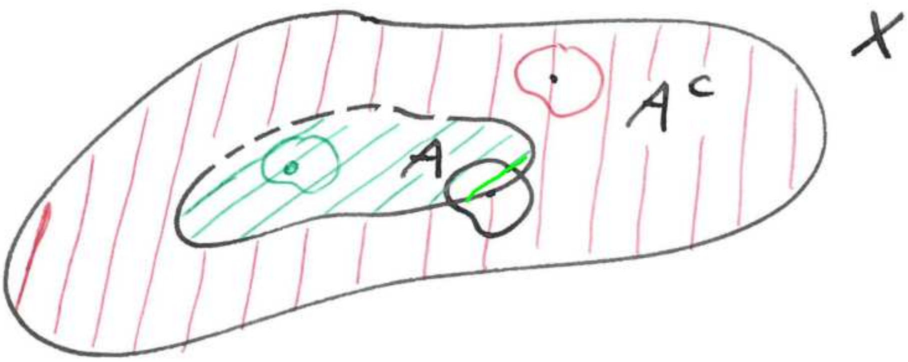
§2.4. Inneres, Äusseres, Rand, Isolierte Punkte & Häufungspunkte

2.28 Motivation (Inneres, Äußeres, Rand) Im folgenden sei immer $(X, \mathcal{O})$ top. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.

Die Vorgabe einer Teilmenge $A \subseteq X$ teilt X
mengentheoretisch in A und $A^c = X \setminus A$,
topologisch in Inneres, Äußeres & Rand.



A … grün
A^c … rot

innen: Punkte, die eine grüne Umgebungen haben
außen: Punkte, die eine rote Umgebung haben
} Pkte, die eine einfärbige U haben.

Rand: Punkte, die nur zweifärbige Umgebungen haben

2.29 DEF (Innere, äußere und Randpkte) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R., $A \subseteq X$, $x \in X$.

(i) x heißt innerer Punkt von $A :\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A$ [$\mathcal{U}_x$ Umgebungssystem von x]

x heißt äußerer Punkt von $A :\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A^c$ (d.h. $U \cap A = \emptyset$)

x heißt Randpunkt von $A :\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x :$

$$U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset$$

(ii) $A^\circ \equiv \mathrm{int}(A) := \{x \,/\, x$ innerer Pkt von $A\}$

heißt <u>Inneres von A</u>

$\mathrm{ext}(A) := \{x \,/\, x$ äußerer Pkt von $A\}$ heißt <u>Äußeres von A</u>

$\partial A := \{x \,/\, x$ Randpkt von $A\}$ heißt <u>Rand von A</u>.

2.30 BEOBACHTUNG (direkte Konsequenzen aus 2.29)

(i) $\mathrm{int}(A) \subseteq A$; $\mathrm{ext}\, A \subseteq A^c$

∂A kann sowohl Punkte aus A als auch aus A^c enthalten; muß aber nicht; in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ gilt für $A = (0,1), [0,1), [0,1]$ jeweils $\partial A = \{0,1\}$

(ii) $\mathrm{int}(A^c) = \mathrm{ext}(A)$

$\mathrm{ext}(A^c) = \mathrm{int}(A)$

$\partial A = \partial(A^c)$

(iii) $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$, ∂A sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist ganz X; diese 3 Mengen bilden also eine <u>Partition</u> von X.

2.31 BSP in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$.

(i) $A = (0,1] \Rightarrow A^\circ = (0,1)$; $\mathrm{ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

$\partial A = \{0,1\}$

(ii) $B = \mathbb{Q}$; da jedes Intervall sowohl rationale als auch irrationale Pkte enthält gilt

$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathrm{ext}\,\mathbb{Q} = \emptyset$.

2.32 PROP (Eigenschaften von int, ext, ∂)

int(A) und ext(A) sind offen; ∂A ist abgeschlossen

Beweis: •) $\underline{x \in \mathrm{int}(A)} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x \quad U \subseteq A$

$$\overset{(U4)}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{U}_x \ \forall y \in V: U \in \mathcal{U}_y \wedge U \subseteq A$$

$$\overset{2.29(i)}{\Longrightarrow} \forall y \in V: \ y \in \mathrm{int}(A)$$

$$\Longrightarrow V \subseteq \mathrm{int}(A)$$

$$\overset{(U3)}{\Longrightarrow} \underline{\mathrm{int}(A) \in \mathcal{U}_x}$$

$$\overset{2.18}{\Longrightarrow} \mathrm{int}(A) \text{ ist offen}$$

•) $\mathrm{ext}(A) \overset{2.30(iii)}{=} \mathrm{int}(A^c)$ ist offen

•) $\partial A \underset{2.30(iii)}{=} X \setminus (\underbrace{\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)}_{\text{offen nach (O2)}})$ ist abgeschlossen. $\square$

2.33 PROP (Charakterisierung von A°)

A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, d.h.
A° ist eindeutig bestimmt durch die 3 Eigenschaften

(i) A° ist offen

(ii) $A^\circ \subseteq A$

(iii) $\forall O$ offen $O \subseteq A \Rightarrow O \subseteq A^\circ$

Beweis (i) = 2.32

(ii) = 2.30(i)

(iii) Sei $O \subseteq A$ offen, $x \in O \Rightarrow x \in O \subseteq A$

$\overset{2.29}{\Longrightarrow} x \in A^\circ$ $\qquad O \in \mathcal{U}_x$ (2.18)

$\Longrightarrow O \subseteq A^\circ$

Eindeutigkeit: H erfülle ebenfalls

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} H \text{ offen} \\ H \subseteq A \end{array}\right\} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} H \subseteq A^\circ \\ \forall O \subseteq A \text{ offen} \Rightarrow O \subseteq H \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} A^\circ \subseteq H \end{array}\right\} \Rightarrow H = A^\circ$$

Setze $O = A^\circ$
(möglich wegen (i), (ii))

$\square$

2.34 Prop (Eigenschaften von int)

(i) $A^\circ \subseteq A$

(ii) $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(v) A offen $\Leftrightarrow A^\circ = A$

(vi) $A^{\circ\circ} = A^\circ$

Beweis: (i) = 2.30(i)

(ii) $x \in \emptyset^\circ \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : x \in U \subseteq \emptyset \Rightarrow$ WID $\Rightarrow \emptyset^\circ = \emptyset$

$\forall x \in X: X \in \mathcal{U}_x \wedge X \subseteq X \Rightarrow x \in X^\circ \Rightarrow X \subseteq X^\circ$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} X = X^\circ$

(iii) $A \subseteq B \wedge \underline{x \in A^\circ} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x\ x \in U \subseteq A \subseteq B \Rightarrow \underline{x \in B^\circ}$

$\Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

(iv) •) $A \cap B \subseteq A, \subseteq B \overset{(iii)}{\Longrightarrow} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ, \subseteq B^\circ \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

•) $2.32(i) + (O3) \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ$ ist offen
$(i) \Rightarrow A^\circ \subseteq A \wedge B^\circ \subseteq B \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ $\Bigg\}\overset{2.33(iii)}{\Longrightarrow} A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A\cap B)^\circ$

(v) A offen $\overset{2.33(iii)}{\Longrightarrow} A \subseteq A^\circ$; $A = A^\circ \overset{2.32}{\Longrightarrow} A$ offen

(vi) A° offen nach 2.32 $\overset{(v)}{\Longrightarrow} A^{\circ\circ} = A^\circ$ $\square$

2.35 DEF (Abschluss(operator))

(i) $\bar{A} := A^\circ \cup \partial A$ heißt <u>Abschluß</u> von A.

(ii) Die Abb $c: 2^X \to 2^X$
$A \mapsto c(A) := \bar{A}$ heißt <u>Abschlußoperator</u>

2.36 BEOBACHTUNG (Unmittelbare Konsequenzen aus 2.35)

(i) $\bar{A}$ ist <u>abgeschlossen</u>, denn $\bar{A} = (\mathrm{ext}(A))^c$ + 2.32

(ii) <u>$A \subseteq \bar{A}$</u>, denn $A \cap A^c = \emptyset \overset{2.30(i)}{\Longrightarrow} A \cap \mathrm{ext}(A) = \emptyset \overset{2.30(iii)}{\Longrightarrow} A \subseteq A^\circ \cup \partial A$

(iii) <u>$\bar{A} = A^{coc}$</u> $\left(:= ((A^c)^\circ)^c\right)$, denn
$$\underset{2.30(iii)}{\bar{A} =} (\mathrm{ext}(A))^c \underset{2.30(ii)}{=} (\mathrm{int}(A^c))^c = ((A^c)^\circ)^c$$

(iv) <u>$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \mathcal{U}_x : A \cap U \neq \emptyset$</u>, denn
$$x \in \bar{A} \underset{2.30(iii)}{\iff} x \notin \mathrm{ext}(A) \underset{2.29(i)}{\iff} \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$$

(v) $\bar{A} = A \cup \partial A$
(vi) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ $\Big\}$ (Beweise im PS)

2.37 BSP in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$

(i) $A = (0,1] \Rightarrow \bar{A} = [0,1]$ (2.31 (i))

(ii) $B = \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{B} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

2.38 BEM Die Definition von $\bar{A} := A^\circ \cup \partial A$ ist zwar sehr anschaulich in Beweisen aber technisch aufwendig: für $x \in \bar{A}$ müssen die beiden Fälle $x \in A^\circ$ und $x \in \partial A$ unterschieden werden; Einfacher ist es daher meist mit

$\bar{A} = A^{coc}$ (2.36 (iii)) oder

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$ (2.36 (iv))

2.39 PROP (Charakterisierung des Abschlusses)

$\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

[d.h. (vgl. 2.33]

Beweis. [UE; beherzige 2.38!]

2.40 PROP (Eigenschaften des Abschlußoperators)

(i) $A \subseteq \bar{A}$

(ii) $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{X} = X$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(v) A abg $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

(vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Beweis [UE; beherzige 2.38!]

2.41 BEM (Top via Abschlußoperator)

Eine historisch sehr frühe Definition einer Topologie benutzt den Abschlußoperator (Kuratowskischer Hüllenoperator, 1922). In unserer Terminologie nimmt das die folgende Form an.

SATZ (Grundeigenschaften des Abschlußoperators)

(C1) $c(\emptyset) = \emptyset$ [= 2.40 (ii)]

(C2) $A \subseteq c(A)$ [= 2.40 (i)]

(C3) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ [= 2.40 (iv)]

(C4) $c(c(A)) = c(A)$ [= 2.40. (vi)]

SATZ (Top via Abschlußoperator)

Sei X eine Menge und $c: 2^X \to 2^X$ ein Operator, der (C1) – (C4) erfüllt. Dann definiert

$$\mathcal{O} := \{ O \subseteq X \mid c(X \setminus O) = X \setminus O \}$$

eine Topologie auf X. Für jedes $A \subseteq X$ gilt $\bar{A} = c(A)$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

[o. Beweis]

2.42 MOTIVATION (Häufungspunkte, isolierte Pkte)

Sei weiterhin $(X,\mathcal{O})$ t.R. $x\in X$, $A\subseteq X$.

Ein Punkt $x\in A$ kann „alleine" = isoliert „dasitzen" oder (in jeder Umgebung) die Gesellschaft weiterer A-Pkte genießen. Letzteres kann sogar für $x\notin A$ gelten; die gehören dann aber sicher zu ∂A.

2.43 DEF (Häufungspkt & isolierter Pkt) Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R.

[$x\in X$, $A\subseteq X$; $\mathcal{U}_x$ U-System bei x]

(i) x heißt <u>Häufungspkt</u> (HP) von A

$$:\Longleftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists y\neq x: y\in U\cap A \quad [x\in A \vee x\notin A]$$

(ii) $A' := \{x\in X \mid x \text{ ist HP von } A\}$

(iii) x heißt <u>isolierter Pkt</u> (IP) von A

$$:\Longleftrightarrow \exists U\in\mathcal{U}_x: U\cap A=\{x\} \quad [\Rightarrow x\in A]$$

(iv) $\mathrm{Isol}(A) := \{x\in X \mid x \text{ ist IP von } A\}$

2.44. BEOBACHTUNG (Unmittelbar aus 2.43, 2.35)

(i) Vergleiche

$$A' := \{x\in X \mid \forall U\in\mathcal{U}_x: U\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset\}$$

$$\bar{A} = \{x\in X \mid \forall U\in\mathcal{U}_x: U\cap A \neq\emptyset\}$$

[$x\in U\cap A$ „zählt" in A' „mit" in $\bar{A}$ nicht!]

(ii) Jedes $x \in A$ ist entweder IP oder HP von A, d.h. $A = \mathrm{Isol}(A) \cup (A' \cap A)$

2.45 Bsp (IP, HP) Wir betrachten $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$.

(i) $(0,1]' = [0,1]$

(ii) $A = [0,1] \cup \{2\}$; $\mathrm{Isol}(A) = \{2\}$, $A' = [0,1]$

(iii) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ haben keine HP in $\mathbb{R}$; alle natürlichen/ganzen Zahlen sind IP (in $\mathbb{R}$).

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \in \mathbb{Q}'$; $\mathbb{Q}$ hat keine IP (in $\mathbb{R}$).

2.46 Prop (Abschluss + HP)

$$\boxed{\bar{A} = A \cup A'}$$

[Das ist oft die Def von $\bar{A}$ ...]

Beweis: ($\subseteq$) $x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A$

oder $x \in \bar{A} \setminus A \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x \; U \cap A \neq \emptyset$

da $x \notin A \Rightarrow \exists y \neq x \in U \cap A$

($\supseteq$) $A \subseteq \bar{A}$ (2.36(ii))

$A' \subseteq \bar{A}$ (vergiß $y \neq x$ in 2.43(i)) $\square$

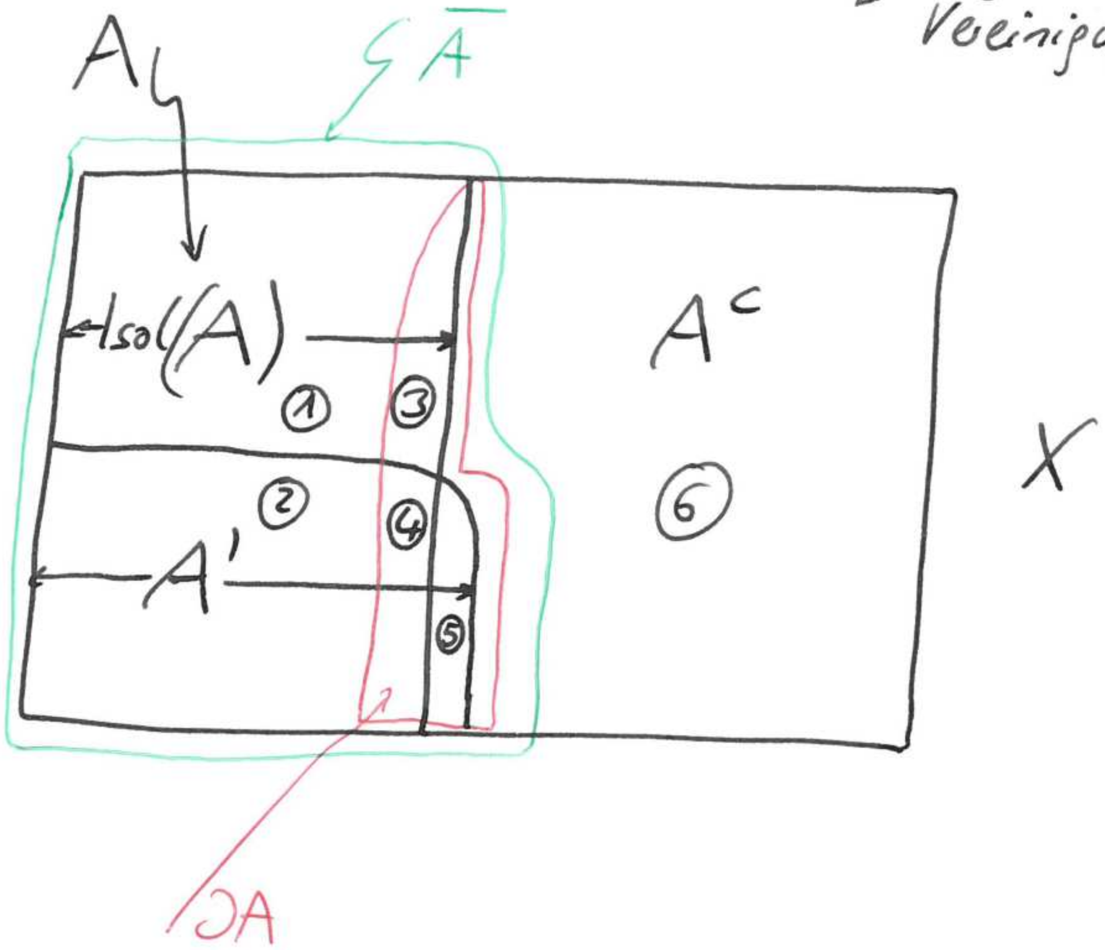
2.47 Kor $\boxed{\bar{A} = \mathrm{Isol}(A) \cup A'}$

Beweis: $\bar{A} \underset{2.46}{=} A \cup A' \underset{2.44(ii)}{=} (\mathrm{Isol}(A) \cup \underbrace{(A' \cap A)}_{\subseteq A'}) \cup A' = \mathrm{Isol}(A) \cup A'$ $\square$

2.48 BEM (int, ∂, ext vs HP, IP)

Das Verhältnis bzw. die Unterscheidung der Einteilg int – ∂ – ext und HP – IP ist garnicht so einfach. [siehe auch UE]. I.A. ergibt sich eine Partition von X in 6 Teilmengen

[disjunkt und Vereinigung ergibt alles]



$$\left.\begin{array}{ll} ① & \mathrm{Isol}(A) \cap A^\circ \\ ② & A' \cap A^\circ \end{array}\right\} = A^\circ$$

$$\left.\begin{array}{ll} ③ & \mathrm{Isol}(A) \cap \partial A \\ ④ & A' \cap A \cap \partial A \\ ⑤ & A' \setminus A \end{array}\right\} = \partial A$$

$$\begin{array}{ll} ⑥ & \mathrm{ext}(A) \end{array} \quad = \mathrm{ext}(A)$$

§2.5. Dichtheit, Separabilität & Abzählbarkeitsaxiome

2.49 Motivation: In diesem letzten § des Grundlagenkap. wollen wir einige Eigenschaften TR diskutieren, die mit der "Größe" der Topologie zu tun haben ...

2.50 Def (Dichte TM & Separabilität) Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R., $Y \subseteq X$

(i) Y heißt *dicht* in X $:\Longleftrightarrow \overline{Y} = X$

[d.h. $\forall x \in X: x \in \overline{Y}$

d.h. $\forall x \in X\ \forall U \in \mathcal{U}_x: U \cap Y \neq \emptyset$ (2.36(ii))

d.h. Jede Umgebung/jede offene Menge $\neq \emptyset$ enthält Y-Pkte]

(ii) X heißt *separabel* $:\Longleftrightarrow \exists Y \subseteq X$ abzählbar und dicht.

2.51 Bsp (Separable Räume)

(i) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (2.37(ii)) $\Rightarrow \mathbb{R}$ separabel

$\mathbb{R}^n$ ist separabel denn $\mathbb{Q}^n$ ist dicht in $\mathbb{R}^n$

zB im $\mathbb{R}^2$

$p, q \in \mathbb{Q}$

(ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$ ist *nicht* separabel

$\forall Y \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow Y \in \mathcal{O}_{dis} \Rightarrow \forall Y: Y$ abg $\Rightarrow \forall Y: Y = \overline{Y}$

daher ist $\mathbb{R}$ einzige dichte Menge in $\mathbb{R}$; der $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(iii) Als wichtige Bsp der Funktionalanalysis:

ℓ^2 ist separabel, ℓ^∞ ist nicht separabel

[Nicht-separable Hilbert Räume sind unangenehm.]

2.52 DEF (Abzählbarkeitsaxiome) $(X,\mathcal{O})$ t.R.

(i) X erfüllt das <u>1. Abzählbarkeitsaxiom</u>

(Wir sagen "X ist AA1") $:\Longleftrightarrow \forall x\in X\ \exists$ abzählbare Umgebungsbasis

(ii) X erfüllt das <u>2. Abzählbarkeitsaxiom</u>

(Wir sagen "X ist AA2") $:\Longleftrightarrow \mathcal{O}$ hat eine abzählbare Basis

2.53 BEM (Konsequenzen von AA1, AA2)

(i) X AA1, $x\in X \Longrightarrow$ OBdA $\mathcal{W}_x = \{W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots\}$

Umgebungsbasis

denn ersetze gegebenenfalls W_k durch

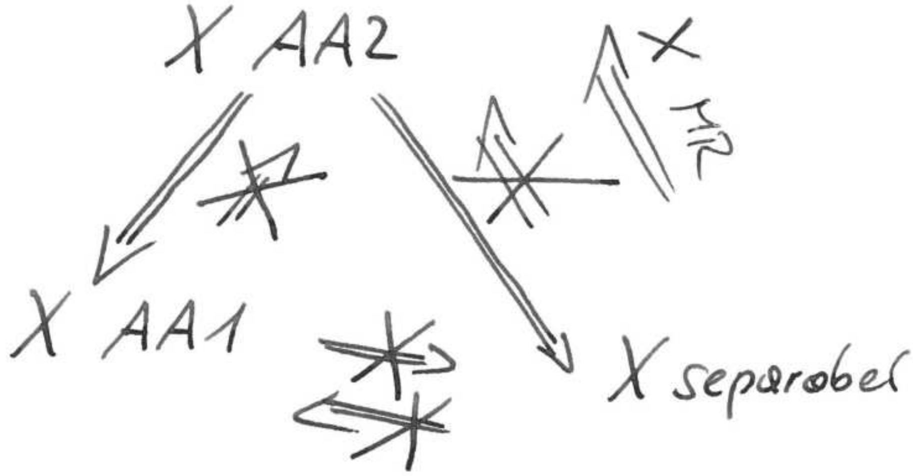
$W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k$

(ii) Jeder tR dessen Top von einer Metrik induziert ist erfüllt AA1; $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ist abz. Umgebungsbasis bei x.

(iii) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$ ist AA2 (2.10 (i) bzw UE 16)

Wir klären nun erschöpfend die Beziehg AA1 – AA2 – separabel

2.54 THM (AA1 vs AA2 vs separabel) $(X, \mathcal{O})$ t.R



Es gilt sogar: separabel $\wedge$ AA1 $\not\Rightarrow$ AA2

Beweis: AA2 $\Rightarrow$ AA1: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ abz. Basis für $\mathcal{O}$.

Sei $\mathcal{W}_x$ U-Basis bei x (z.B. $\mathcal{W}_x = \mathcal{U}_x$ ... U-System).

Sei $W \in \mathcal{W}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O \in \mathcal{O}: x \in O \subseteq W \overset{2.9.(ii)}{\Longrightarrow} \exists B_k: x \in B_k \subseteq O$

wobei $k = k(W)$ von W abhängt.

Nun ist $\{B_k \mid \exists W \in \mathcal{W}_x: k = k(W)\}$ abz. U-Basis bei x.

AA2 $\Rightarrow$ separabel: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, \dots\}$ abz. Basis für $\mathcal{O}$.

Wähle in jedem B_k (OBdA $B_k \neq \emptyset$ $\forall k \in \mathbb{N}$!) ein x_k.

Damit ist $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht, denn jede nicht leere offene Menge enthält ein B_k und somit ein x_k.

X MR (X separabel $\Rightarrow$ X AA2): Sei (X, d) MR und $\mathcal{O}$ wie in 2.4(i). Sei $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ abz & dicht in X.

Wir zeigen $\mathcal{B} := \{B_{\frac{1}{n}}(y_k) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ ist (abz!) Basis von $\mathcal{O}$.

Wir verwenden 2.9(ii): also ist zz $\forall O \in \mathcal{O}\ \forall x \in O\ \exists B_x \in \mathcal{B}: x \in B_x \subseteq O$

Sei $O \in \mathcal{O}$ $x \in O \Rightarrow \exists \delta > 0: B_\delta(x) \subseteq O$ (2.4(i))

Sei $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} \xRightarrow{Y \text{ dicht}} \exists y_{k_0} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$

Sei $y \in B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0}) \Rightarrow d(x,y) \overset{(M3)}{\leq} d(x, y_{k_0}) + d(y_{k_0}, y)$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \delta$$

$\Rightarrow x \in B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0}) \subseteq B_\delta(x) \subseteq O$ mit $B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0}) \in \mathcal{B}$.

Die Niemytzki-Halbebene H ist separabel und AA1 aber nicht AA2:

(vgl 2.26(iii))

- $Y := \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Q}, y > 0\}$ ist abzählbar und dicht, da jede Menge der U-Basis $B_\varepsilon(p)$ bzw $C_\varepsilon(p)$ enthält Pkte aus Y
- Die Familien $B_{\frac{1}{n}}(p)$ bzw $C_{\frac{1}{n}}(p)$ bilden abz. U-Basis
- Ist $\mathcal{B}$ Basis von H, dann muß es zu jedem $p = (a, 0)$ ($a \in \mathbb{R}$) ein $B_p \in \mathcal{B}$ geben: $p \in B_p \subseteq C_1(p)$ (2.9(ii))

Da $B_p \cap \{x\text{-Achse}\} = \{p\}$ sind überabzählbar viele B_p nötig.

Dieses Bsp zeigt

$\underline{AA1 \not\Rightarrow AA2}$, $\underline{\text{separabel} \not\Rightarrow AA2}$, $\underline{\text{separabel} + AA1 \not\Rightarrow AA2}$

$\underline{AA1 \not\Rightarrow \text{separabel}}$: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$: $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\{\{x\}\}$ U-Basis bei $x \Rightarrow \underline{AA1}$ aber $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$ ist $\underline{\text{nicht separabel}}$ (2.51(ii))

$\underline{\text{Separabel} \not\Rightarrow AA1}$: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{co})$ (vgl. 2.4(v))

- Jede abz. Teilmenge Y ist dicht, da jede offene Menge (O^c ist endlich) Y-Pkte enthält. $\Rightarrow$ $\underline{\text{separabel}}$
- $\underline{\text{kein}}$ Pkt hat eine $\underline{\text{abz. U-Basis}}$, denn ang schon, d.h. sei $\{W_1, W_2, \dots\}$ abz. U-Basis bei x. Dann definiere

$$A := \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \Rightarrow x \in A$$

$$A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{W_i^c}_{\text{endl}} \text{ abzählbar} \Rightarrow A^c \cup \{x\} \neq \mathbb{R}$$

(De Morgan)

$\exists O \in \mathcal{O}: O \subseteq W_i \Rightarrow O^c \supseteq W_i^c$ und O^c endlich

Sei $y \in \mathbb{R} \setminus (A^c \cup \{x\}) \Rightarrow x \neq \underline{y \in A}$ (*)

$\Rightarrow W := \mathbb{R} \setminus \{y\}$ offene Umgebung von x

$\Rightarrow \exists W_e: x \in W_e \subseteq W$

$y \notin W \Rightarrow y \notin W_e \Rightarrow y \notin A$ (lt. Def v. A)

Wid zu (*) ↯

$\square$

2.55 KOR Die Topologie der Niemytzki-HE H kann nicht von einer Metrik stammen.

Beweis: Wäre H metrisch, dann wäre die Kombination separabel aber nicht AA2 unmöglich. $\square$

2.56 BEM (Zur Bedeutung von AA1-2)

(i) Die Bedeutung von AA1-Räumen liegt daran, dass Fragen der Konvergenz mittels Folgen behandelt werden können; also dieselben Techniken wie in MR greifen. [Ist ein Raum nicht AA1, dann „versanden" Folgen mit ihren abz. vielen Pkten bevor sie in die überabzählbar vielen kleinen Umgebungen eines Pktes kommen.] $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{KAP 3}}$

(ii) Die Bedeutung von AA2-Räumen liegt darin, dass diese Eigenschaft für top. Mannigfaltigkeiten (grundlegend für die gesamte moderne Geometrie, Top, Globale Analysis) gefordert wird.

[siehe auch [J, VI §3]]