3 KONVERGENZ

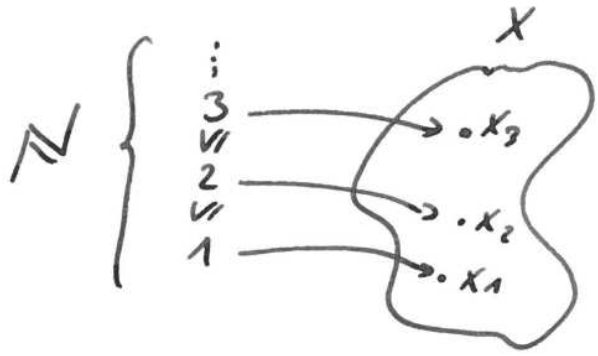
3.1. EINLEITUNG: Zum Studium von Konvergenz in t.R. stellen sich die aus der Analysis und den MR bekannten Folgen als zuwenig flexibel heraus; vgl. auch 2.56(i). Weder Stetigkeit noch Abschluß können mittels Folgen (in nicht AA1-Räumen) charakterisiert werden...

Aber, alles wird wieder gut, wenn wir die Indexmenge $\mathbb{N}$ bei Folgen zu einer beliebigen gerichteten Menge verallgemeinern und so den Begriff des Netzes erhalten. Damit können die aus MR bekannten Resultate „problemlos" übersetzt werden. Der einzig heikle Punkt ist das Verfeinern eines Netzes, was analog zum Teilfolgenbegriff ist.

Ein wichtiger Unterschied zwischen Grenzwerten von Netzen in t.R. und Grenzwerten von Folgen in MR ist, dass erstere nicht eindeutig sein müssen [vgl. UE für die Eindeutigkeit im 2. Fall]. Top. R. wo Grenzwerte eindeutig sind können durch das Hausdorffsche Trennungsaxiom charakterisiert werden. Dieses und weitere Trennungsaxiome sind Inhalt des §3.2.

§3.1. NETZE, KONVERGENZ

3.2. MOTIVATION: Folgen sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach X.



Wir werden nun die Indexmenge $\mathbb{N}$ – eine geordnete Menge – durch eine spezielle Art von geordneten Mengen ersetzen. Eine beliebige geordnete nicht totalgeordnete Menge ist für unsere Zwecke nicht brauchbar – wir müssen sicherstellen, dass 2 „Zweige" der Ordnung nicht getrennt bleiben.

(es gibt nicht vergleichbare Elemente vgl. 2.6.)

3.3 DEF (gerichtete Menge). Sei Λ eine Menge und $\leq$ eine Relation auf Λ (d.h. eine Teilmenge von $\Lambda \times \Lambda$)

(i) $(\Lambda, \leq)$ heißt <u>geordnete Menge</u>, falls $\forall \mu, \nu, \lambda \in \Lambda$ gilt

(R) $\lambda \leq \lambda$ (Reflexivität)

(T) $\lambda \leq \mu \wedge \mu \leq \nu \Rightarrow \lambda \leq \nu$ (Transitivität)

(A) $\lambda \leq \mu \wedge \mu \leq \lambda \Rightarrow \mu = \lambda$ (Anitsymmetrie)

(ii) gilt außerdem

(nof) $\forall \lambda, \mu \in \Lambda \ \exists \nu \in \Lambda: \lambda \leq \nu \wedge \mu \leq \nu$ (nach oben filtrierend)

so heißt $(\Lambda, \leq)$ <u>gerichtete Menge</u>.

3.6 BEM (Zur Ordnung der Begriffe)

NICHT VORGETRAGEN

Oft wird (A) nicht in die Definition der gerichteten Menge mit hineingenommen; d.h. in einer derartigen gerichteten Menge kann für verschiedene Elemente λ, μ sowohl $\lambda \leq \mu$ als auch $\mu \leq \lambda$ gelten. Wir wollen das aber nicht tun!

Allgemein können wir die Begriffe wie folgt ordnen

(i) (R) + (T) ... $\leq$ heißt Präordnung (Quasiordnung)

(ii) Eine Präordnung heißt total, wenn $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ gilt

(tot) $\lambda \leq \mu \vee \mu \leq \lambda$.

(iii) Eine Präordnung heißt Ordnung (partielle Ordnung, Halbordnung) wenn (A) gilt.

(iv) In Präordnungen muß „$<$" als

(kl) $\lambda < \mu :\Leftrightarrow \lambda \leq \mu \wedge \mu \not\leq \lambda$ definieren und NICHT als

(kl') $\lambda < \mu :\Leftrightarrow \lambda \leq \mu \wedge \lambda \neq \mu$.

Das hätte nämlich für $\lambda \neq \mu$, $\lambda \leq \mu$, $\mu \leq \lambda$ die unangenehme Konsequenz $\lambda < \mu \wedge \mu < \lambda$ – was wir sicher nicht wollen.

In Halbordnungen gilt aber (kl) $\Leftrightarrow$ (kl'); darum wird in der „Einführung in das math. Arbeiten" gefahrlos das anschaulichere (kl') verwendet.

3.5 BSP (gerichtete Mengen)

(i) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung; ebenso $\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$ und jede totalgeordnete Menge.

(ii) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathfrak{Z} := \{$Zerlegungen von $[a,b]$ / $z = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b\}\}$

Wir definieren $z_1 \leq z_2 :\Leftrightarrow z_1 \subseteq z_2$. Dann ist $(\mathfrak{Z}, \leq)$ gerichtete Menge: (R), (T), (A) sind klar; für $z_1, z_2 \in \mathfrak{Z}$ gilt $z_1 \cup z_2 \in \mathfrak{Z}$ und $z_1 \leq z_3 \wedge z_2 \leq z_3$ also gilt (nof).

(iii) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R. $x \in X$ und $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis bei x (z.B. $\mathcal{V}_x = \mathcal{U}_x$). Wir definieren

$$V_1 \leq V_2 :\Longleftrightarrow V_2 \subseteq V_1 \quad [\text{sic!}]$$

$(\mathcal{V}_x, \leq)$ ist geordnete Menge: (R), (T), (A) sind klar; (nof) ist gerade (UB2).

12.VO 29.4.

13.VO 3.5

3.6 DEF (Netz) Sei X eine Menge.

Ein <u>Netz in X</u> ist eine Abbildung $x : \Lambda \to X$, wobei Λ eine beliebige gerichtete Menge ist.

Wir schreiben x_λ statt $x(\lambda)$ und bezeichnen das gesamte Netz mit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(x_\lambda)_\Lambda$ oder (x_λ)

3.7 DEF (Limes, HW). Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R, $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in X, $x \in X$,

(i) Wir sagen (x_λ) konvergiert gegen x, $x_\lambda \to x$ bzw x ist ein Grenzwert (GW)/Limes von x_λ, falls

$\mathcal{U}_x$ Umgebungssystem bei x

$$\forall U \in \mathcal{U}_x\ \exists \lambda_0\ \underbrace{\forall \lambda \geq \lambda_0 : x_\lambda \in U}_{(x_\lambda)_\lambda \text{ schließlich in } U}$$

(ii) x heißt Häufungswert (HW) von $(x_\lambda)_\lambda$ $:\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x\ \underbrace{\forall \lambda_0\ \exists \lambda \geq \lambda_0 : x_\lambda \in U}_{(x_\lambda)_\lambda \text{ immer wieder in } U}$

3.8 BEOBACHTUNG $x_\lambda \to x \Rightarrow x$ HW von $(x_\lambda)_\lambda$, denn

$U \in \mathcal{U}_x$ $\lambda_0 \in \Lambda$; $\exists \lambda_1\ \forall \lambda \geq \lambda_1 : x_\lambda \in U$. Sei $\lambda_2 \in \Lambda$ so gewählt, dass $\lambda_2 \geq \lambda_1$, $\lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_2} \in U$ [Beachte (nöf)!]

3.9 BSP (Netze, Konvergenz)

(i) $\Lambda = \mathbb{N}$ mit der gew. Ordnung (vgl. 3.5(i)). Diese Netze sind genau die Folgen in X; obige Definitionen von Grenzwert und HW reproduzieren genau die Defs in MR, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$.

(ii) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervall, $\mathcal{Z}$ wie in 3.5(ii)

Für jede beschränkte Fkt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir über $\mathcal{Z}$ die beiden Netze ($Z = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$)

$$O(f)_Z := \sum_{k=1}^{n} M_k (t_k - t_{k-1}) \qquad M_k := \sup\{f(t) \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\}$$

$$U(f)_Z := \sum_{k=1}^{n} m_k (t_k - t_{k-1}) \qquad m_k := \inf\{ \text{—} \mid \text{—} \}$$

Die Analysis lehrt, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, falls $O(f)_Z \to \alpha \leftarrow U(f)_Z$ gilt; dieser Grenzwert wird dann bekanntlich mit $\int_a^b f(t)\,dt$ bezeichnet.

(iii) $(X,\mathcal{O})$ t.R., $x \in X$ und $\Lambda = \mathcal{V}_x$ wie in 3.5(iii).

Für jedes $V \in \Lambda = \mathcal{V}_x$ wählen wir ein beliebiges $x_V \in V$ und betrachten das Netz $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_x}$. Dann gilt

$$x_V \to x.$$

Denn sei $\underline{U \in \mathcal{U}_x} \overset{2.23}{\Longrightarrow} \underline{\exists V_0 \in \mathcal{V}_x}: V_0 \subseteq U$; sei $\underline{V \geq V_0}$ (d.h. $V_0 \supseteq V$!) $\Rightarrow \underline{x_V} \in V \subseteq V_0 \subseteq \underline{U}$.

Dieses Netz $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_x}$ ersetzt gewissermaßen eine Folge $(x_n)_n$ in einem MR mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$.

3.10 SATZ (Abschluß via Netze)

Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R., $A \subseteq X$, $x \in X$. Dann gilt

(i) A abg $\Leftrightarrow \forall$ Netze $(x_\lambda)_\lambda$ in A mit $x_\lambda \to x \Rightarrow x \in A$

(ii) $\bar{A} := \{x \in X \mid \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } A : x_\lambda \to x\}$

__Beweis__ (wörtlich wie in $\mathbb{R}^{(n)}$, MR)

(i) ($\Rightarrow$) Sei $x_\lambda \in A\ \forall \lambda \in \Lambda$, $x_\lambda \to x$. Indir ang $x \notin A \Rightarrow$ A^c offene Umgebung von $x \wedge \nexists\, x_\lambda \in A^c$ $\lightning$ zur Konvergenz

(⇐) Indir ang. A nicht abg. $\overset{2.60(v)}{\Longrightarrow} \exists x \in \bar{A} \setminus A$

Sei $\mathcal{U}_x$ U-Basis von x $\overset{2.36(iv)}{\Longrightarrow} \forall V \in \mathcal{U}_x \ \exists x_V \in A \cap V$. (insbes $x_V \in A$)

Konstruiere Netz $(x_V)_V$ wie in 3.9(iii) $\Rightarrow x_V \to x$

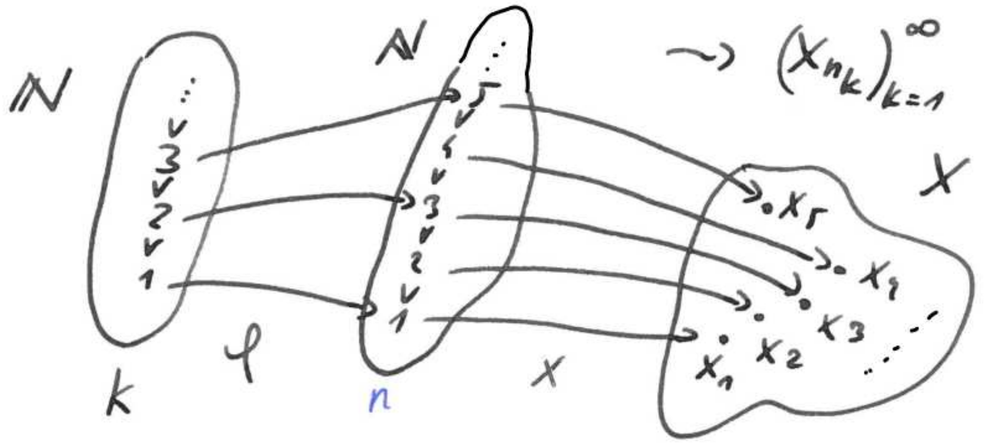
$\Rightarrow x \in A$ lt. Voraus ↯ zu $x \notin A$

(ii) [ÜE] $\square$

3.11. MOTIVATION (Teilfolge; Verfeinerung eines Netzes)

Dem Begriff einer Teilfolge entspricht der Begriff der Verfeinerung eines Netzes; betrachten wir zunächst ersteren

$(x_n)_{n=1}^\infty$ Folge; Teilfolge $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ $(n_1 < n_2 < \dots)$



Hier wird offenbar die Teilfolge $x_1, x_3, x_5, \dots$ dargestellt

$$1 \longmapsto n_1 = 1 \longmapsto x_{n_1} = x_1 =: y_1$$
$$2 \longmapsto n_2 = 3 \longmapsto x_{n_2} = x_3 =: y_2$$
$$3 \longmapsto n_3 = 5 \longmapsto x_{n_3} = x_5 =: y_3$$

Somit entsteht die Folge $(y_k)_{k=1}^\infty$ als Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^\infty$ mittels $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(\varphi(k) = n_k)$ durch

$$\boxed{y_k = x_{n_k} = x \circ \varphi(k)}$$

Wesentlich dabei ist, dass φ <u>monoton</u> ist ($n_{k+1} \geq n_k$) und dass die Werte von φ <u>über jede Schranke wachsen</u>. Daher...

<u>3.12 DEF</u> (Verfeinerung) Sei Λ eine gerichtete Menge und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Sei K eine weitere gerichtete Menge und $\varphi: K \to \Lambda$ eine Abb mit den Eig (i) <u>monoton</u> [d.h. $k_1 \leq k_2 \Rightarrow \varphi(k_1) \leq \varphi(k_2)$]

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda\ \exists k \in K: \varphi(k) \geq \lambda$.

Dann bezeichnen wir das Netz $(y_k)_{k\in K}$ mit

$$y_k := x_{\varphi(k)}$$

als eine <u>Verfeinerung</u> des Netzes $(x_\lambda)_\Lambda$.

<u>3.13 BEM</u> (zu Verfeinerungen)

(i) <u>ACHTUNG</u>: Eine Verfeinerung $(y_k)_k$ eines Netzes kann "viel mehr" Glieder haben als das ursprüngliche Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in dem Sinn, dass K viel größer sein kann als Λ obwohl natürlich $\varphi(K) \subseteq \Lambda$, d.h. $\{y_k \mid k \in K\} \subseteq \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ gilt. [φ ist monoton aber nicht streng monoton.] Insbesondere muss die Verfeinerung einer Folge keine Folge mehr zu sein!

z.B. sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$; $K:=[1,\infty)$ (überabzählbar!)
und $y_t := x_{\lfloor t\rfloor}$ $t\in K$, $\lfloor\cdot\rfloor$ nächstkleinere ganze Zahl. 13.Vo 7.5
Dann ist $(y_t)_{t\in K}$ Verfeinerung von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber keine Folge.

(ii) Eine Verfeinerung einer Verfeinerung ist wieder eine Verfeinerung

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[rrr, bend right, "z"'] & K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "y"'] & \Lambda \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$

14.Vo 5.5.

Erfüllen nämlich φ, ψ (i), (ii) in 3.12, dann auch $\psi\circ\varphi$.

3.14 Prop (Eigenschaft von Verfeinerungen)

Sei $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in $(X,\mathcal{O})$ und $(y_\kappa)_\kappa = (x_{\varphi(\kappa)})_\kappa$ eine Verfeinerung von $(x_\lambda)_\lambda$. Dann gilt

(i) Konvergiert $(x_\lambda)_\lambda$ gegen x, dann auch $(y_\kappa)_\kappa$.

(ii) Ist $x\in X$ HW von $(y_\kappa)_\kappa$ ist, dann auch von $(x_\lambda)_\lambda$ [sic!]

Beweis: (i) Sei $U\in\mathcal{U}_x \overset{3.7(i)}{\Longrightarrow} \exists\lambda_0\ \forall\lambda\ge\lambda_0: x_\lambda\in U$; wähle κ_0 mit $\varphi(\kappa_0)\ge\lambda_0$ (möglich wegen 3.12(ii)); für $\kappa\ge\kappa_0$ gilt:
$\varphi(\kappa)\ge\varphi(\kappa_0)\ge\lambda_0 \Longrightarrow y_\kappa = x_{\varphi(\kappa)}\in U$.

(ii) Sei $U\in\mathcal{U}_x$, $\lambda_0\in\Lambda$; wähle κ_0 mit $\varphi(\kappa_0)\ge\lambda_0$
$\overset{3.7(ii)}{\Longrightarrow} \exists\, \kappa\ge\kappa_0$ mit $y_\kappa\in U$. Setze $\lambda:=\varphi(\kappa) \Longrightarrow$
$\lambda=\varphi(\kappa)\ge\varphi(\kappa_0)\ge\lambda_0$ und daher $x_\lambda = x_{\varphi(\kappa)} = y_\kappa\in U$. $\square$

3.15 SATZ (Char. von HW) (X,Θ) t.R., $x\in X$

x ist HW von $(x_\lambda)_\lambda \iff \exists$ Verfeinerung $(y_k)_k \to x$

Beweis ($\Leftarrow$) $y_k \to x \overset{3.8.}{\Longrightarrow} x$ HW von $(y_k)_k \overset{3.14}{\Longrightarrow} x$ HW von $(x_\lambda)_\lambda$

($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{V}_x$ U-Basis von x. Wir setzen

$$K := \{(\lambda, V) \mid \lambda\in\Lambda,\ V\in\mathcal{V}_x,\ x_\lambda \in V\}$$

[x HW $\Rightarrow$ jedes $V\in\mathcal{V}_x$ kommt in mind. einem Element von K vor]

•) K ist gerichtete Menge mit $(\lambda_1,V_1)\leq(\lambda_2,V_2) :\iff \lambda_1\leq\lambda_2 \wedge V_1\supseteq V_2$

(R), (T), (A) sind klar; wir zeigen (nof): $(\lambda_1,V_1), (\lambda_2,V_2)\in K$

(nof) für $\Lambda \Rightarrow \exists \lambda_3: \lambda_3\geq\lambda_1 \wedge \lambda_3\geq\lambda_2$; (U2) $\Rightarrow \exists V_3\subseteq V_1\cap V_2$

$\Rightarrow (\lambda_1,V_1)\leq(\lambda_3,V_3) \wedge (\lambda_2,V_2)\leq(\lambda_3,V_3)$

•) $y_{(\lambda,V)} := x_\lambda$ (d.h. $\varphi: K\to\Lambda$, $\varphi(\lambda,V)=\lambda$) ist gegen x konvergente Verfeinerung.

$y_{(\lambda,V)}$ pickt jene x_λ heraus, die nahe an x sind..

Sei $U\in\mathcal{U}_x$; wähle $V_0\in\mathcal{V}_x$: $V_0\subseteq U$ (2.23). Sei $\lambda_1\in\Lambda$ bel.

x HW $\Rightarrow \exists \lambda_0\in\Lambda: \lambda_0\geq\lambda_1$ $x_{\lambda_0}\in V_0$

$\Rightarrow (\lambda_0,V_0)\in K$. Für $(\lambda,V)\geq(\lambda_0,V_0)$ gilt dann

$y_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V\subseteq V_0\subseteq U$. $\square$

3.16 BEM (Filter)

(i) Es gibt eine Umformulierung des top. Konvergenz-begriffs, der statt Netzen sog. Filter verwendet; dieser ist ebenso anschaulich wie der Netz-begriff schließt aber nicht unmittelbar an den Folgen-begriff an und wird daher außerhalb der Top selten verwendet.

NICHT VORGETRAGEN

[(ii) In manchen Teilen der Mathematik werden Konvergenzbegriffe verwendet, die nicht durch top. R. beschrieben werden können... [CR] 4.2(6).]

---

§ 3.2. EINDEUTIGKEIT DES GRENZWERTS, TRENNUNGSAXIOME

3.17 NOTATION (Grenzwerte eind. bestimmt) $(X,\mathcal{O})$ t.R.

Folgt aus $x_\lambda \to x$ und $x_\lambda \to y$ stets $x=y$, so sagen wir: In $(X,\mathcal{O})$ sind die Grenzwerte eind. bestimmt.

3.18 BSP ((nicht) eindeutige Grenzwerte)

(i) In MR sind die Grenzwerte eind. bestimmt [UE, Aufgabe 7]; daher auch in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$.

(ii) In der Klumpentopologie konvergiert jedes Netz gegen jeden Grenzwert; denn sei $(x_\lambda)_\lambda$, x beliebig. $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U = X \Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda: x_\lambda \in U = X \Rightarrow x_\lambda \to x$.

(iii) $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie.

- $(x_n)_n = (1, 2, 3, \ldots)$ konvergiert gegen jedes $x \in \mathbb{N}$

denn sei $x \in \mathbb{N}$, $U \in \mathcal{U}_x \overset{2.18}{\Longrightarrow} \exists V$ offen: $x \in V \subseteq U$

$V = \mathbb{N} \setminus \{x_1, \ldots x_k\}$. Sei $N = \max\{x_1, \ldots, x_k\} + 1$; $n \geq N$

$\Rightarrow x_n = n \in \mathbb{N} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\} \Rightarrow x_n \in V \subseteq U$

- $(x_n)_n = (*, \ldots *, k, k, k, \ldots)$; d.h. $(x_n)_n$ ist schließlich konstant und gleich k

egal

klar

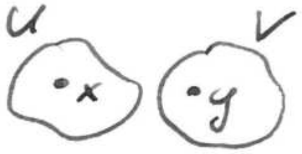
$(x_n)_n \to k$ und k ist einziger Grenzwert von $(x_n)_n$

da $(x_n)_n$ jedes $\mathbb{N} \setminus \{k\}$ verlässt und diese Menge ist offene Umgebung von jedem $\ell \neq k$.

3.19 SATZ+DEF (Eind. Grenzwerte und T_2)

In einem TR $(X, \mathcal{O})$ sind die Grenzwerte genau dann eindeutig bestimmt, wenn das folgende sog. Trennungsaxiom T_2 erfüllt ist.

(T_2) $\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U \in \mathcal{U}_x$ und $V \in \mathcal{U}_y$: $U \cap V = \emptyset$

[graphisch: ]

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{O})$ Hausdorff-Raum.

<u>Beweis</u>: ($\Rightarrow$) Indirekt: ang. (T2) gilt nicht, d.h.

$\exists x, y \in X,\ x \neq y$ aber $\forall U \in \mathcal{U}_x\ \forall V \in \mathcal{U}_y : U \cap V \neq \emptyset$

Seien $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y$ U-Basen von x resp. y. Wir definieren

$\Lambda := \{(U,V) \mid U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$, $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2 \wedge V_1 \supseteq V_2$

Dann ist Λ gerichtete Menge bzgl $\leq$.

Für $(U,V) \in \Lambda$ wähle $z \in U \cap V$ ($\neq \emptyset$!) und definiere

$x_{(U,V)} = z$

Dann gilt $x_{(U,V)} \to x$ und $x_{(U,V)} \to y$ [vgl. 3.9(iii)] $\neq$ ↯ zur Voraus. dass in $(X, \mathcal{O})$ die Grenzwerte eindeutig sind.

14.V.
5.5
15.V.
11.5.

($\Leftarrow$) $x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to y$ und ang $x \neq y$

$\overset{(T2)}{\Longrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y : U \cap V = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lambda_1 : \forall \lambda \geq \lambda_1 \ \ x_\lambda \in U \\ \exists \lambda_2 : \forall \lambda \geq \lambda_2 \ \ x_\lambda \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mit } \lambda_3 := \max(\lambda_1, \lambda_2) \text{ gilt } \forall \lambda \geq \lambda_3 : x_\lambda \in U \cap V \ ↯$$

$\square$

<u>3.20 BEM</u> (Hausdorff-Räume)

(i) Jeder MR ist Hausdorff [UE, Aufgabe 7 + Satz 3.18] oder direkt für $x \neq y$: $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$ $\forall \varepsilon < \frac{d(x,y)}{2}$

(ii) Wegen 2.19. können die Umgebungen in (T2) auch durch beliebige offene Mengen ersetzt werden, die x bzw. y enthalten.

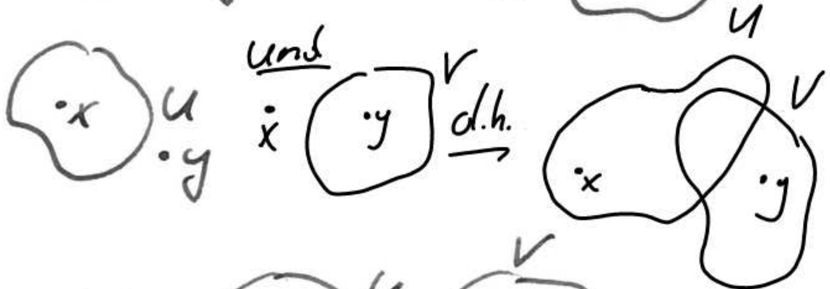
(iii) In nicht (T2)-Räumen sollte die Schreibweise $\lim_\lambda x_\lambda = x$ mit Vorsicht genossen werden. [aus Elementarer Logik folgt aus $\lim x_\lambda = x \wedge \lim x_\lambda = y$, dass $x = y$!]

3.21 DEF (Liste der Trennungsaxiome — Auswahl)

Sei $(X, \mathcal{O})$ top. Raum, $x, y \in X$, $A, B \subseteq X$ abg. $U, V \subseteq X$ offen

(T_0) $\forall x \neq y$ $\exists U: x \in U \not\ni y$ oder $\exists V: y \in V \not\ni x$

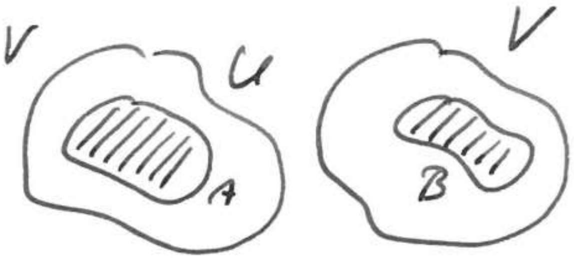
(T_1) $\forall x \neq y$ $\exists U: x \in U \not\ni y$ und $\exists V: y \in V \not\ni x$



(T_2) $\forall x \neq y$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V$

(T_3) $\forall x$ $\forall A \not\ni x$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset$ $x \in U, A \subseteq V$

(T_4) $\forall A, B$ $A \cap B = \emptyset$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset$ $A \subseteq U, B \subseteq V$



3.22. BEM (Fakten zu den Trennungsaxiomen)

(i) Es gilt: $T_4 \;\substack{\not\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_3 \;\substack{\not\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_2 \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_1 \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_0$

(ii) $(T_1) \iff$ alle einpunktigen Mengen sind abgeschlossen

[Beweis: UE!]. Damit ergibt sich

$$\underbrace{T_4+T_1}_{\text{normal}} \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; \underbrace{T_3+T_1}_{\text{regulär}} \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_2 \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_1 \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; T_0$$

(iii) $(T_3) \iff \forall x \in U \in \mathcal{O}\ \exists V \in \mathcal{O}:\ x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

(iv) $(T_4) \iff \forall A\,(\text{abg}) \subseteq U \in \mathcal{O}\ \exists V \in \mathcal{O}:\ A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

(v) Es gibt auch $T_{3\frac{1}{2}}, T_5, \dots$

(vi) Jeder MR ist normal (Kap. 8)

Jeder kp. T_2-Raum ist normal (Kap. 6)

In normalen Räumen gelten wichtige Sätze über stetige Funktionen (Kap. 4,5)

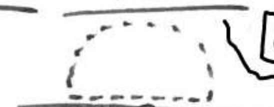
3.23 BSP (Trennungsaxiome)

(i) $(X, \mathcal{O}_{kl})$ mit $|X| \geq 2$ erfüllt nicht T_0, T_1, T_2, regulär, normal aber T_3, T_4 (es gibt keine nichttrivialen Mengen wie gefordert)

(ii) $(X, \mathcal{O}_{co})$, $|X| = \infty$ erfüllt T_1 [$U = X \setminus \{y\}$, $V = X \setminus \{x\}$] aber nicht T_2 [$U \cap V$ = unendlich, da $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ endlich]

(iii) Die Niemytzki-Halbebene ist regulär aber nicht normal.

(iv) Variante von Niemytzki mit U-Basis



[O.B] für $(p,0)$

ist T_2 aber nicht T_3 [$A = \mathbb{Q} \times \{0\}$ nicht von $p = (\sqrt{2}, 0)$ trennbar.]