# 4 STETIGKEIT

**4.1. EINLEITUNG.** Wir haben in Kap. 0 Stetigkeit als einen der Schlüsselbegriffe der Topologie bezeichnet. Tatsächlich sind stetige Abbildungen zw. top. Räumen genau die der Struktur (der offenen Mengen) angepaßten Abbildungen — analog den linearen Abb. zu Vektorräumen; sie transportieren/respektieren offene Mengen in der „richtigen" Art & Weise.

In Kap 1 haben wir stetige Abb zw. MR studiert und mittels offener Mengen bzw Umgebungen die Stetigkeit charakterisiert — dies wird unsere Ausgangsdefinition sein.

Spezielles Augenmerk legen wir auf stetige bijektive Abb. mit stetiger Umkehrabbildung; ähnlich den lin. Isomorphismen im Falle der Vektorräume sind es diese Abb. — die sog. Homöomorphismen — die topologische Ununterscheidbarkeit top. R. vermittelt.

Top-Räume, die homöomorph sind sind vom Standpunkt der Topologie „gleich" – wie isomorphe VR.

Homöomorphismen sind also Abb, die die top. Struktur vollständig erhalten.

Schließlich besprechen wir das Problem der Konstruktion stetiger Abb [mit bestimmten Eigenschaften] auf top. Räumen – insbesondere beweisen wir das Lemma von Urysohn.

11.5. ↓

## §4.1. STETIGE ABBILDUNGEN

13.5. ↓

**4.2. DEF** (Stetige Abb.) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ t.R. und $f: X \to Y$ eine Abb.

$f$ heißt stetig $:\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O}_Y: f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$

[d.h. Urbilder offener Mengen sind offen]

**4.3. BEM** (stetige Abb.)

(i) Die identische Funktion $id_X: (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}),\ x \mapsto x$ ist stetig, denn sei $O \in \mathcal{O} \Rightarrow id^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}$.

(ii) Konstante Abb $f_c: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y),\ x \mapsto c\ \forall x$ sind stetig, denn

$$f_c^{-1}(O) = \begin{cases} \emptyset & c \notin O \\ X & c \in O \end{cases} \in \mathcal{O}_X$$

(iii) $f$ ist schon stetig, falls $f^{-1}(G)$ für jede Menge $G$ einer [jeder] Basis oder Subbasis offen ist; denn z.B. für Subbasis: Sei $O \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow$

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}}\Big) \overset{[\text{UE}, 1]}{=} \bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{f^{-1}(S_{ij})}_{\text{offen}} \text{ offen wegen (O1), (O2).}$$

(iv) Aus der Def. ist ersichtlich, dass sich $f$ umso leichter [schwerer] tut stetig zu sein je feiner [gröber] $\mathcal{O}_X$ und je gröber [feiner] $\mathcal{O}_Y$ ist.

Neben (iii) gibt es weitere Charakterisierungen für Stetigkeit:

**4.4 SATZ** (Umformulierungen für Stetigkeit) Sei $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abb. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent

(i) $f$ ist stetig

(ii) $\forall x \in X: U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$ [Urbilder von Umg. sind Umg.]

(iii) $\forall A$ abg in $Y \Rightarrow f^{-1}(A)$ abg in $X$ [Urbilder abg. Menge sind abg.]

Beweis [UE]

**4.5 BEM** (Stetig in einem Punkt). Wir nennen $f$ stetig in $x \in X$, falls (ii) aus 4.4 in $x$ gilt. Damit ergibt sich wie üblich in $\mathbb{M}\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$,

$$f \text{ stetig (auf } X) \Longleftrightarrow f \text{ stetig in } x \ \forall x \in X$$

Stetigkeit in einem Punkt kann wie in MR mittels Konvergenz charakterisiert werden

4.6. SATZ (Stetigkeit via Netze) $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig in $x\in X$ falls

$$\forall \text{ Netze } (x_\lambda)_\lambda \text{ mit } x_\lambda\to x \implies f(x_\lambda)\to f(x).$$

Beweis [wörtlich wie in MR - vgl. UE 8] $\square$

4.7 SATZ (Operationen f. stetige Fkt)

(i) $(X,\mathcal{O}_X)\xrightarrow{f}(Y,\mathcal{O}_Y)\xrightarrow{g}(Z,\mathcal{O}_Z)$ beide stetig

$$\implies g\circ f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Z,\mathcal{O}_Z) \text{ stetig}.$$

(ii) $f,g:(X,\mathcal{O})\to\mathbb{R}\,[\mathbb{C}]$ stetig $\implies$

$$f\pm g,\ f\cdot g,\ |f|,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \text{ stetig}$$

Ist $g(x)\neq 0\ \forall x \implies f/g$ stetig.

Beweis (i) $O\in\mathcal{O}_Z \implies (g\circ f)^{-1}(O)=f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(O)}_{\in\mathcal{O}_Y})\in\mathcal{O}_X$

(ii) ohne Beweis. $\square$

Wir kommen nun zu den angekündigten „Isomorphismen" der Topologie.

**4.8 DEF** (Homöomorphismen) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ t.R; $f: X \to Y$

heißt Homöomorphismus zwischen $X$ und $Y$ falls

$$f \text{ stetig, bijektiv und } f^{-1} \text{ stetig}$$

ist. In diesem Fall heißen $X$ und $Y$ homöomorph; wir schreiben $X \cong Y$.

**4.9 WARNUNG**: $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig und bij $\not\Rightarrow$ $f^{-1}$ stetig

[auf die Stetigkeit der Umkehrabbildung kann in 4.8. also nicht verzichtet werden]. Ein Gegenbsp ist:

$X = Y$, $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{dis}$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{KE}$, $f(x) = x$ $\forall x$ [also $f = id_X$]

Dann ist $f$ offensichtlich bij und stetig: $f^{-1}(G) \overset{=G}{} $ offen $\forall G \subseteq X$

aber $f^{-1} = g: (X, \mathcal{O}_{KE}) \to (X, \mathcal{O}_{dis})$ nicht stetig, denn

$\forall G \subseteq X$ $G \neq \emptyset$, $G \neq X \Rightarrow g^{-1}(G) = G$ nicht offen.

**4.10 BEM** (Homöos als Isos der Top) $f: X \to Y$ Homöo

(i) Es gilt offensichtlich $O \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow$ $f(O) \subseteq Y$ offen

und somit auch

$$A \subseteq X \text{ abg} \Leftrightarrow f(A) \subseteq Y \text{ abg}$$

$$\mathcal{B} \text{ Basis in } X \Leftrightarrow f(\mathcal{B}) \text{ Basis in } Y$$

und dito für $\mathcal{U}_x$, $\mathcal{V}_x$, ...

$(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sind daher vom Standpunkt der Topologie aus ununterscheidbar – die top. Struktur ist identisch.

(ii) Allgemein sieht man zwei Realisierungen einer mathematischen Struktur als nicht wesentlich verschieden an, falls es eine umkehrbar eindeutige (=bij) Abbildung zwischen ihnen gibt, die die Struktur erhält; in verschiedenen „Welten" sind dies etwa

Lin. Algebra : Isomorphismen von VR
Gruppenth. : Gruppenisomorphismen
Topologie : Homöomorphismen
Differentialgeo: Diffeomorphismen ( $\mathcal{C}^\infty$, bij mit $\mathcal{C}^\infty$-Inverse)

<u>4.11. BEM</u> (Homöomorphie als Äquivalenzrelation)

Offensichtlich ist mit $f$ auch $f^{-1}$ und mit $f, g$ auch $f \circ g$ Homöo. Ebenso ist $id_X : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Homöo. Daher definiert Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller top. Räume.

16.VO
13.5
18.5.
17.VO

<u>4.12 BEM</u> (Topologische Eigenschaften)

Wir nennen eine Eigenschaft topolog. Räume <u>topologisch</u> falls sie mit $(X, \mathcal{O})$ auch jeder zu $(X, \mathcal{O})$ homöomorphe Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ besitzt. Bsp.

top. Eig. sind

- AA1/2
- Separabilität
- Metrisierbarkeit (d.h. $\mathcal{O}$ stammt von einer Metrik im Sinne von 2.4)
- Kompaktheit (Kap 6)
- Zusammenhang (Kap 7)

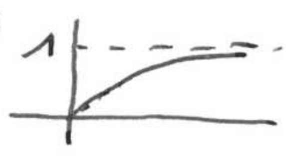
Zum Beweis transportieren wir einfach die relevanten Objekte (offene Mengen, Basen, abz. dichte TM, etc...) mittels des Homöo von $X$ nach $Y$.

<u>Nicht-Topologische Eigenschaften</u> sind etwa solche, die spezielle Eig. der die Top definierenden Metrik verwenden wie z.B.

- Beschränktheit (als MR)
- Vollständigkeit (als MR) [d.h. jede CF konvergiert]

<u>Bsp:</u> $f: [0,\infty) \to [0,1)$ homöo

$$x \mapsto \frac{x}{1+x}$$



vollst. MR mit unbeschr. Metrik

nicht vollst. $d(x,y) \leq 1 \ \forall x,y$

[ $f' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = 1/(1+x)^2 > 0 \Rightarrow$ str. mon $\Rightarrow$ bij

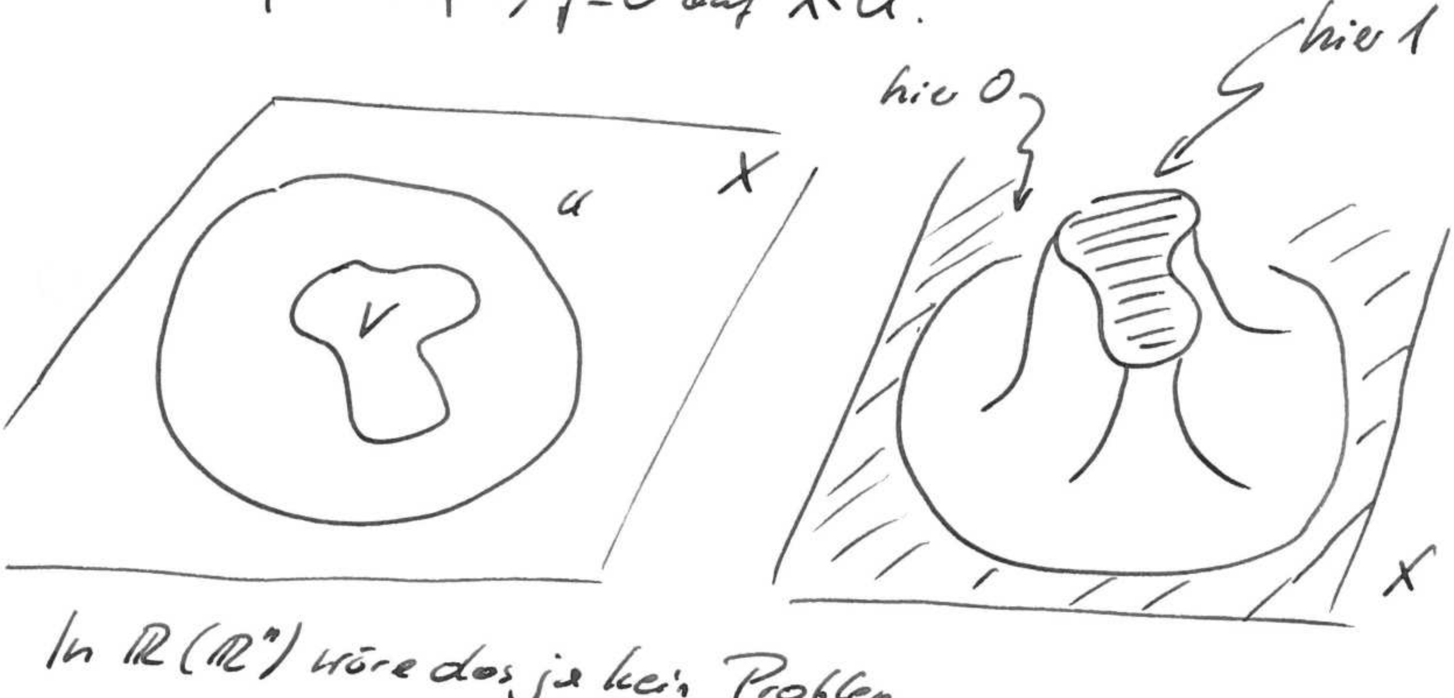
$f$ stetig & $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ stetig auf $[0,1)$ $\Rightarrow f$ Homöo ]

# §4.2 Konstruktion stetiger Funktionen auf top. Räumen

**4.13 Bem** (Grundaufgabe der Funktionenkonstr. auf top. Räumen)

Wenn wir auf $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) oder einem Teilraum stetige Fkt konstruieren wollen, so stellt uns die Analysis eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Verfügung; z.B. Polynome, rat. Fkt., elementare Fkt ($\sin$, $\cos$, $e$, $\log$, ...), Potenzreihen, ...

Auf allg. top. Räumen ist die Situation schon viel schwieriger. Stellen wir uns vor, wir haben $V \subseteq U \subseteq X$ im t.R. $(X, \mathcal{O})$ gegeben und wollen eine Funktion finden $f: X \to [0,1]$ stetig, sodass $f \equiv 1$ auf $V$, $f \equiv 0$ auf $X \setminus U$.




In $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) wäre das ja kein Problem...


Dass diese Grundaufgabe der Funkt.-konstruktion auf t. R. lösbar ist, falls geeignete Trennungseig. gegeben sind sagt der folgende Satz.

**4.14. SATZ** (Lemma von Urysohn) $(X,\mathcal{O})$ t.R

$X$ $T_4$ $\Rightarrow$ $\forall A,B \subseteq X$ abg mit $A\cap B=\emptyset$
$\exists f: X\to[0,1]$ stetig mit $f|_A=1$, $f|_B=0$

[d.h. die Grundaufgabe aus 4.13 ist lösbar
$A=V$, $B=X\setminus U$ ]

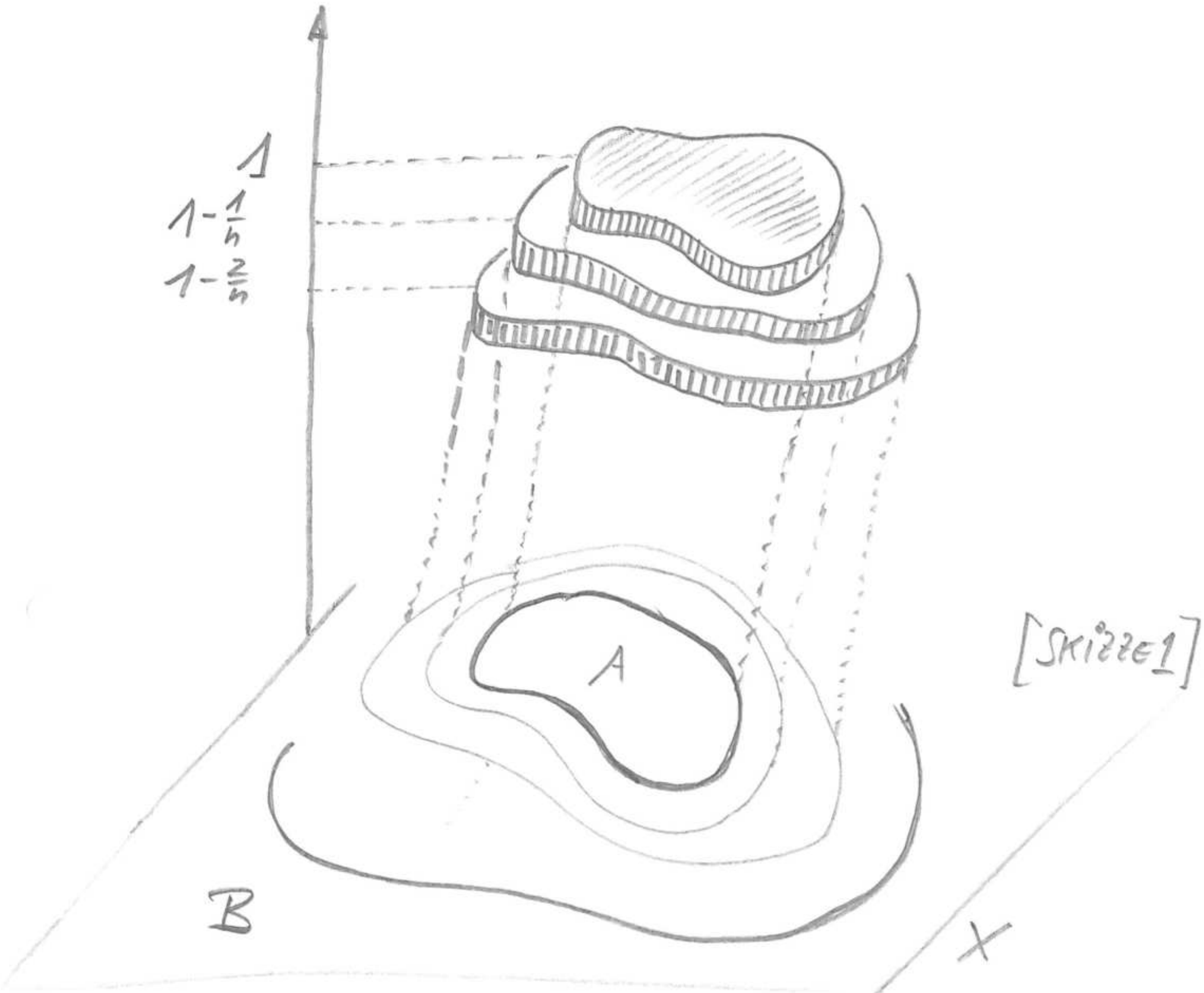
**4.15 BEM** (Umkehrung) Die Umkehrung gilt ebenfalls und ist einfach zu sehen, denn sei $f$ wie oben, dann trennen $U:=\{x \mid f(x)>1/2\}$ und $V=\{x \mid f(x)<1/2\}$ $A$ und $B$ offen
$\Rightarrow T_4$. [Offenheit von $U$, $V$ benötigt
eigentlich den Begriff der Spurtop auf $[0,1]$; vgl. 5.2]

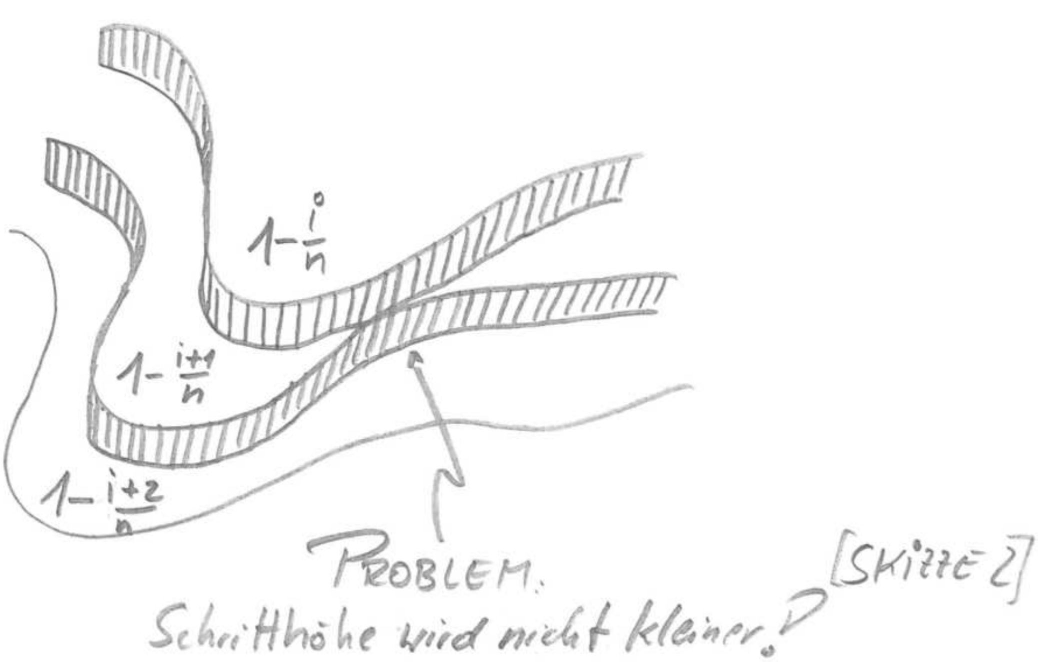
**4.16. Beweisidee:** Konstruieren $f$ als Limes von Treppenfkt.
Eine solche anzugeben bedeutet aber genau eine „Kette" von Mengen zwischen $A$ und $B$ anzugeben, d.h.

$$A=A_0\subseteq A_1\subseteq \ldots \subseteq A_n\subseteq X\setminus B$$

und $f$ wie folgt zu definieren: $f|_{A_0}=1$, $f|_{A_1\setminus A_0}=1-\frac{1}{n}$, $f|_{A_2\setminus A_1}=1-\frac{2}{n}$, …
… $f|_{A_n\setminus A_{n-1}}=0$ [siehe Skizze 1].

Um die Sprünge kleiner zu machen müssen wir die „Kette" verfeinern, d.h. weitere Zwischenstufen einziehen.
Wenn dieses Verfahren Erfolg haben soll, dann darf eines nicht passieren: dass der Rand von $A_{i-1}$ den Rand von $A_i$ erreicht [siehe Skizze 2].
Wir brauchen also $\boxed{\overline{A_{i-1}}\subseteq A_i^\circ \ \forall i.}$


1
1 - 1/n
1 - 2/n
A
B
X
[SKIZZE 1]


1 - i/n
1 - (i+1)/n
1 - (i+2)/n
PROBLEM:
Schritthöhe wird nicht kleiner?
[SKIZZE 2]

Wenn wir das induktiv beweisen wollen, so ist der Induktionsanfang kein Problem: $A = A_0 \subseteq A_1 := X \setminus B$.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ abg $\quad$ offen

Den Induktionsschritt liefert aber genau $T_4$ mittels Bem 3.22(iv) [Beweis UE]
[$\forall A$ abg $A \subseteq U$ offen $\exists V$ offen: $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$].

Der Beweis ist nun nur noch eine konsequente Ausformulierung dieser Idee [UE, [J] $\underline{\text{VIII}}$, §2].

4.17 <u>KOROLLAR</u> (Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R, $T_4$, $A \subseteq X$ abg und $f: A \to [-\infty, +\infty]$ stetig.
Dann existiert eine stetige Funktion $F: X \to [-\infty, +\infty]$, die $f$ fortsetzt, d.h. $F|_A = f$.

<u>4.18</u> BEM (Tietze Urysohn)

(i) Die Aussage $f: A \to [-\infty, +\infty]$ stetig haben wir eigentlich noch garnicht definiert, da wir Topologien auf Teilmengen nicht definiert haben; das erfolgt erst in §5.1. Daher beweisen wir 4.17 [hier] nicht.
[Bew in [J] VIII §3]

(ii) 4.17 bleibt mit Zielraum $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ gültig
[J, VIII §3].

(iii) Der nächste Schritt in der Konstruktion stetiger Funktionen wäre die Konstruktion von sog. Zerlegungen der Eins; diese spielen v.a. in der Differentialgeometrie eine große Rolle [3, VIII §4] und benötigen (analog zu $T_4$ in 4.14, 4.17) die top. Eigenschaft parakompakt.

17.VO
18.5.

# 5 SPURTOPOLOGIE, INITIALE & FINALE TOPOLOGIE

18. VO 27.5.

**5.1. EINLEITUNG:** Grundsätzlich widmen wir uns in diesem Kap. der Aufgabe aus bereits vorhandenen Topologien neue Topologien zu erzeugen.
Zunächst "topologisieren" wir so Teilmengen eines top. Raumes und gelangen zur Spurtopologie bzw Teilraumtop. Desweiteren besprechen wir den Transport von Topologien entlang von Abbildungen - und zwar entlang (finale Top.) und gegen (initiale Top) die Abbildungsrichtung. Die Spurtopologie wird schließlich als (Spezialfall einer) initialen Top. entlarvt.

## §5.1. DIE SPURTOPOLOGIE

**5.2 DEF** (Spur-/Teilraumtopologie) $(X,\mathcal{O})$ t.R. $Y \subseteq X$
Wir definieren die Spurtopologie $\mathcal{O}|_Y$ auf $Y$ durch

$$\mathcal{O}|_Y := \mathcal{O} \cap Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{O}\}$$

und nennen diese auch von $\mathcal{O}$ auf $Y$ induzierte Top oder Teilraumtop. auf $Y$. [Die offenen Mengen in $\mathcal{O}|_Y$ sind also die offenen Mengen in $X$ geschnitten mit $Y$.]

**5.3 BEM** (Spurtop ist Top!) $\Theta/_Y$ erfüllt tatsächlich (O1) – (O3), denn

(O1) $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$

(O2) $\bigcup_i (O_i \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcup_i O_i\right)}_{\in \Theta} \cap Y$ (O3) $\bigcap_{i=1}^{n} (O_i \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right)}_{\in \Theta} \cap Y$.

**5.4 PROP** (Eigenschaften der Spurtop.) $(X,\Theta)$ t.R, $(Y,\Theta/_Y)$ Teilraumtop

Dann gilt

(i) $U \in \mathcal{U}_x^Y \iff \exists W \in \mathcal{U}_x : U = W \cap Y$

U-System in $\Theta/_Y$

(ii) $A$ abg bez. $\Theta/_Y \iff \exists B$ abg bez. $\Theta$ : $A = B \cap Y$

(iii) $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y \quad \forall A \subseteq Y$

Abschluß in $\Theta/_Y$

(iv) $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in $Y$, $x \in Y$ und $x_\lambda \to x$ bzg. $\Theta/_Y$

$\iff x_\lambda \to x$ bzg. $\Theta$

(v) $f : (X,\Theta) \to (Z,\Theta_Z)$ stetig $\Longrightarrow f|_Y : (Y,\Theta/_Y) \to (Z,\Theta_Z)$ stetig

Beweis: [ÜE] □

**5.5 BSP** (Spurtop)

(i) $(\mathbb{R},\Theta_n)$, $Y = [0,1)$ mit Spurtop $\Theta_n/_Y$

denn $A_1 = Y \cap (-1,\frac{1}{2})$

$A_1 = [0,\frac{1}{2})$ offen in $Y$ bzgl $\Theta_n/_Y$; Sprechweise: offen in $Y$

ACHTUNG: offen in $Y$ $\neq$ offen und in $Y$, denn $A_1$ nicht offen in $\mathbb{R}$.

$A_2=(\frac{1}{2},1)$ offen in $Y$, offen in $\mathbb{R}$ $[A_2=Y\cap A_2]$

$A_3=[0,\frac{1}{2}]$ abg in $Y$, abg in $\mathbb{R}$ $[A_3=Y\cap A_3]$

$A_4=[\frac{1}{2},1)$ abg in $Y$, nicht abg in $\mathbb{R}$ $[A_4=Y\cap[\frac{1}{2},1]]$

(ii) $(\mathbb{R},\mathcal{O}_n)$, $Y=\mathbb{Z}$ mit SpurTop (analog für $\mathbb{N}$):

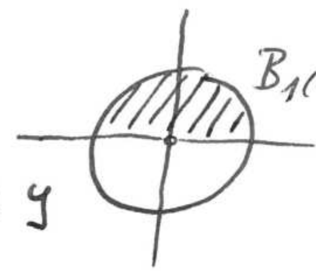
$\mathcal{O}_n|_{\mathbb{Z}}=\mathcal{O}_{dis}$, denn $\{k\}=\mathbb{Z}\cap\underbrace{(k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}_{\in\mathcal{O}_n}$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

(iii) $(\mathbb{R},\mathcal{O}_n)$, $Y=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ mit SpurTop:

$\{\frac{1}{n}\}$ ist offen, denn $\{\frac{1}{n}\}=Y\cap(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1})$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

aber die SpurTop ist nicht diskret, denn eine U-Basis von $0$ in $Y$ ist $V_k=Y\cap B_{\frac{1}{k}}(0)=\{0,\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+2},\dots\}$.

(iv) $(\mathbb{R}^2,\mathcal{O}_n)$, $Y=B_1(0)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid \|x\|_2<1\}$




$M:=\{x=(x_1,x_2)\in B_1(0)\mid x_2\geq 0\}$ ist abg in $Y$

$[M=B_1(0)\cap\{x_2\geq 0\}]$ aber nicht abg in $\mathbb{R}^2$.

# §5.2. Transport von Topologien entlang von Abbildungen

**5.6 Motivation** (Transport entlang einer Abb)

**initiale Top**

$f: X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben

$X$ … Menge, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ … top. Raum

will auf $X$ (Pfeilbeginn) eine interessante Top $\mathcal{O}_X$ definieren, sodass $f$ bzgl. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ stetig.

**finale Top**

$f: (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ gegeben

$(X, \mathcal{O}_X)$ … top. R., $Y$ … Menge

will auf $Y$ (Pfeilende) eine interessante Top $\mathcal{O}_Y$ definieren, sodass $f$ bzgl. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ stetig.

Zur Stetigkeit von $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$

$$f \text{ stetig} \iff f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X$$


$\mathcal{O}_Y$ gegeben… $\mathcal{O}_X$ muss mindestens so groß sein, dass es $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ enthält

- $\mathcal{O}_X$ maximal: $\mathcal{O}_X = 2^X$ (diskret) als der uninteressant
- $\mathcal{O}_X$ minimal: $\mathcal{O}_X = f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$, d.h.

  $O \in \mathcal{O}_X :\iff O = f^{-1}(G),\ G \in \mathcal{O}_Y$

  initiale Top

$\mathcal{O}_X$ gegeben… $\mathcal{O}_Y$ darf maximal so groß sein, dass $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ in $\mathcal{O}_X$ reinpasst.

- $\mathcal{O}_Y$ minimal: $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{KL}$ (Klumpen) als der uninteressant
- $\mathcal{O}_Y$ maximal: genau so dass $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$, d.h.

  $G \in \mathcal{O}_Y :\iff f^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X$

  finale Top

## 5.7 DEF + PROP (initiale & finale Top)

(i) Sei $f : X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben. Die <u>initiale Top</u> auf $X$ bzgl. $f$ ist definiert als
$$\mathcal{O}_X := \{ f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{O}_Y \}.$$
Sie ist die <u>gröbste</u> Top auf $X$, sodass $f$ stetig ist.

(ii) Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ gegeben. Die <u>finale Top</u> auf $Y$ bzgl. $f$ ist definiert als
$$\mathcal{O}_Y := \{ G \subseteq Y \mid f^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X \}.$$
Sie ist die <u>feinste</u> Top auf $Y$, sodass $f$ stetig ist.

18. VO 27.5

19. VO 1.6.

<u>Beweis</u> (i) gröbste ist klar nach 5.6.

(O1) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ offen, $X = f^{-1}(Y)$ offen

(O2) $\bigcup_i O_i = \bigcup_i f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i G_i}_{})$ offen

(O3) $\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\overbrace{\bigcap^n G_i}^{\in \mathcal{O}_Y})$ offen

(ii) analog; <u>beachte</u> in der Def kommt wiederum $f^{-1}$ vor [und nicht etwa die Bilder offener Mengen!] $\square$

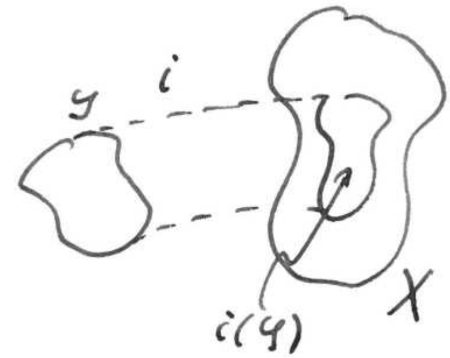
## 5.8 BEM (Spurtop als initiale Top)

Sei $Y \subseteq X$, $(X, \mathcal{O}_X)$ t.R. und $i : Y \to X$; $i(y) = y$ die (kanonische) <u>Einbettungsabbildung</u>.

ACHTUNG: Gegenüber 5.6–5.7 sind die Rollen von $X$ und $Y$ vertauscht!

Es gilt $\boxed{\forall A\subseteq X:\ i^{-1}(A)=A\cap Y}$, denn $x\in i^{-1}(A) \iff$

$x\in Y \wedge A\ni i(x)=x \iff x\in Y\cap A$




Nach Def der initialen Top $\mathcal{O}_Y$ gilt also

$$\mathcal{O}_Y=\{i^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{O}_X\}$$

$$=\{G\cap Y\mid G\in\mathcal{O}_X\}.$$

nach obigem

Also ist $\mathcal{O}_Y$ genau die Spurtopologie; sie ist damit die gröbste Top, sodass $i$ stetig.

**5.8 Bsp** (Quotiententopologie) Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ t.R. und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Wir bezeichnen mit $Y:=X/\sim$ den Quotienten von $X$ modulo $\sim$

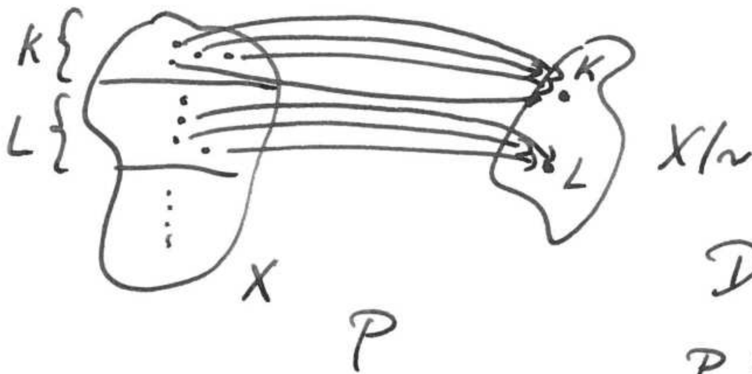
[d.h. $Y=X/\sim$ ist die Menge der Äquivalenzklassen
[vgl. Einf. Math. Arb. 4.2.12]

Äquivalenzklassen: $C_x\equiv[x]\equiv\bar{x}:=\{y\in X\mid x\sim y\}$

Quotient: $X/\sim\ :=\{[x]\mid x\in X\}$ ]

Wir topologisieren den Quotienten mittels der (kanonischen) Projektion

$$p: X\longrightarrow X/\sim$$
$$x\longmapsto [x]$$




Die finale Top auf $X/\sim$ bzgl. $p$ ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_y = \{ G \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X \}.$$

Sie wird als <u>Quotiententopologie</u> auf $X/\sim$ bezeichnet.

<u>BSP</u>: $V$ VR; $W$ Teilraum von $V$, $v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$

$$V/\sim = V/W = \{ v + W \mid v \in V \}$$

<u>Lesetipp</u>: [J, III §1–§5]

<u>5.10 Bem</u> (Transport entlang mehrerer Abb.)

<u>Initiale Top</u>

$$X \xrightarrow{f_i} (X_i, \mathcal{O}_i) \qquad X \xrightarrow{f_j} (X_j, \mathcal{O}_j) \quad \vdots$$

Wir suchen die <u>gröbste Top</u> sodass alle <u>$f_i$ stetig</u> sind, d.h.

$$f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{O}_X \quad \forall i$$

also $\mathcal{O}_X$ minimal s.d.

$$\mathcal{O}_X \supseteq \underbrace{\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(O_i)}_{\text{erfüllt i.A. nicht (O2),(O3)}} \quad O_i \in \mathcal{O}_i \ \forall i$$

<u>Problem</u>

<u>Finale Top</u>

$$(X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{f_i} Y \qquad (X_j, \mathcal{O}_j) \xrightarrow{f_j} Y \quad \vdots$$

Wir suchen die <u>feinste Top</u> s.d. alle $f_i$ stetig sind, d.h.

$$f_i^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_i \quad \forall i$$

$$\mathcal{O}_Y := \{ G \subseteq Y \mid f_i^{-1}(G) \in \mathcal{O}_i \ \forall i \}$$

heißt <u>finale Top</u> bzgl der $f_i$, $X_i$

[(O1)–(O3) folgt wie in 5.7]

Ausweg im Falle der initialen Top: Erkläre

$$\mathcal{S} := \{ f_i^{-1}(O_i) \mid i \in I,\ O_i \in \mathcal{O}_i \}$$

zur Subbasis der <u>initialen Top</u>.

5.11 BEM (Produkttop als initiale Top)

ZUVOR: Wh der Def beliebige Produktmengen. Seien $X_i$ Mengen wobei $i \in I$ eine Indexmenge [vgl EMA 4.1.38, 4.3.43]

- Falls $|I| = n\ (<\infty)$: $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\ \forall i \in I\}$ Menge der $n$-Tupel
- Falls $I$ beliebig: $\displaystyle\mathop{\times}_{i \in I} X_i = \prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i\ \forall i \in I\}$ Menge der Abb auf $I$, die $j \in I$ ins richtige $X_j$ abbildet

Schreibweise $\prod_{i \in I} X_i \ni x = (x_i)_i$

JETZT:

Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ t.R, $X := \prod_{i\in I} X_i$. Für $k \in I$ sei $pr_k$ die <u>k-te Projektionsabb.</u>

$$pr_k : X \to X_k, \quad (x_i)_i \mapsto x_k$$

Wir sehen nun auf $X$ die initiale Top bzgl der $pr_k$

$$X = \prod X_i \xrightarrow{pr_k} (X_k, \mathcal{O}_k), \qquad X = \prod X_i \xrightarrow{pr_\ell} (X_\ell, \mathcal{O}_\ell), \quad \vdots$$

Diese Top $\mathcal{O}_X$ hat als Subbasis (nach 5.10) gerade die $pr_k^{-1}(O_k)$ $O_k \in \mathcal{O}_k$

Nun gilt: 
$$\underline{pr_k^{-1}(O_k)} = \{x = (x_i)_i \mid pr_k(x) \in O_k\} = \{x = (x_i)_i \mid x_k \in O_k\} = \underline{\prod_{i \neq k} X_i \times O_k}$$

Diese Subbasismengen kennen wir aber aus 2.15. (i)
Es sind genau die Subbasismengen der Produkttop

auf $X = \prod X_i$. Wegen 2.13. (Eindeutigkeit!) ist die Produkttop die initiale Top bzgl. der Projektionen; sie ist also die gröbste Top sodass alle $pr_k$ stetig sind.

Dass die Produkttop die „richtige" Top auf $\prod X_i$ ist und nicht die Boxtopologie [vgl. 2.15(ii)] belegt

5.12 PROP Die Produkttop $\mathcal{O}$ auf $\prod X_i$ ist die Topologie der „koordinatenweisen Konvergenz", d.h.

$$x_\lambda \to x \text{ in } (\prod X_i, \mathcal{O}) \iff \forall k: \ pr_k(x_\lambda) \to pr_k(x) \text{ in } (X_k, \mathcal{O}_k)$$

Beweis: ($\Rightarrow$) $pr_k$ stetig nach 5.11, wende 4.6. an. 19. VO 1.6.

($\Leftarrow$) Sei $U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}$; oBdA [2.19] $U$ offen $\overset{2.8(ii)}{\Longrightarrow} \exists V: x \in V \subseteq U$ 20. VO 2.6.

mit $V = \prod_{i \in I} Z_i$; $Z_i \neq X_i$ für nur endlich viele $i \in I$. (vgl. 2.17(ii)) seien dies $i_1, \dots, i_n$

Wähle nun $\lambda_j$ sd $\forall \lambda \geq \lambda_j: pr_{i_j}(x_\lambda) \in Z_{i_j}$ $(j = 1, \dots n)$

Sei nun $\lambda_0 \geq \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ [wegen (ob)], dann gilt für $\lambda \geq \lambda_0$ $pr_{i_j}(x_\lambda) \in Z_{i_j}$ $\forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow x_\lambda \in V$

$\Rightarrow x_\lambda \in U$. $\square$