GRUNDBEGRIFFE DER TOPOLOGIE

ROLAND STEINBAUER

Sommersemester 2015

2 SWSTD / 3 ECTS

1. Vo. 2.3

0 VORBEMERKUNGEN - ZUR EINSTIMMUNG

0.1. Begriffsbestimmung: WAS IST TOPOLOGIE?

Wie immer in solchen Situationen ist es schwer/unmöglich eine Definition zu geben. Ein Versuch einer Begriffsbestimmung ist:

Eine Eigenschaft (Konzept auf) einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist topologisch, falls sie (es) sich nur in Termen der Familie der offenen Mengen auf X und den Standardkonzepten der Mengentheorie ($\in, \subseteq, \cup, \cap, {}^c, \ldots$) formulieren läßt.

Topologie ist das Studium topologischer Eigenschaften von Mengen und Abbildungen. [CR]

Zitate beziehen sich auf die Literaturliste auf der Webseite der Vo

Die Topologie gliedert sich in

(i) MENGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE
[general top; point set top]

(ii) ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE [algebraic top]

ad (i): Alles, das sich allgemein über Begriffe sagen lässt, die auch nur entfernt mit „Nähe", „Konvergenz" und „allmählicher Veränderung" (Stetigkeit) zu tun haben. [J]

Schlüsselbegriffe: TC^4: topology, convergence continuity, compactness connectedness

ad (ii): Alles über die „Gestalt" von gummiartig verformbaren aber unzerreissbaren Körpern/Mengen.

zB: Unterscheidung von Ball, Ring, Brezel via Anzahl der Löcher

In dieser VO befassen wir uns ausschließlich mit (i) [obwohl bei Kleinkindern (ii) früher ausgeprägt ist als (i)].

0.2 Wozu Topologie?

Top ist in erster Linie innermathematische Grundlagendisziplin; sie trägt wesentlich zum „Funktionieren" vieler anderer Teilgebiete bei: (im Organvergleich etwa Leber oder Niere [MG]).

Top ist entstanden aus einer Vernetzung/Verflechtung früher getrennte Teildisziplinen; durch das Immer-wieder-zu-Tage-treten verborgener Analogien. Sie ist gewissermaßen Analogietheorie, die in die betroffenen Gebiete einwandert und sie verbindet.

Die große Stärke der Top liegt nicht nur an den Sätzen/Resultaten die sie bereitstellt, sondern auch im vereinheitlichten Begriffsapparat, den sie zur Verfügung stellt; dessen große Kraft beruht darauf, dass er in vielen abstrakten Situationen einen Anschluß an unser räumliches Vorstellungsvermögen ermöglicht. Dieses wird dadurch für unser abstraktes Denken über math. Probleme nutzbar gemacht [J].

0.3. Besonderheiten – Abstraktion vs. Anwendungen

[M. Grosser, Mathematik für Physik 4 (Funktionalanalysis); Auszug]

Besinnen wir uns auf eine der ursprünglichen Aufgaben der Mathematik in Anwendungssituationen, nämlich etwas „auszurechnen“, die Lösung eines in mathematische Ausdruckweise übersetzten Problems zu ermitteln.

Besteht die Lösung in einem Zahlenwert, so ist es langfristig gesehen wenig sinnvoll, das gegebene Problem als einzelnes anzugehen: In den meisten Fällen wäre das zu schwierig oder insofern unrationell, weil man man beim nächsten Problem wieder von vorne weg zu überlegen beginnen müßte. Viel sinnvoller ist es, die Menge aller in Frage kommenden (reellen, komplexen) Zahlen mit den dort relevanten Rechenoperationen und Strukturen (Ordnung, Nähe und Distanz, Approximation) zu untersuchen und außerdem die Abbildungen dieser Menge (in einer gegebenen Gleichung entspricht ja jede Seite einer Funktion in der gesuchten Unbekannten) zu studieren. Das geschieht in der Analysis der Funktionen einer (reellen beziehungsweise komplexen) Variablen.

Analoges gilt, falls die Lösung in einem Zahlenvektor beziehungsweise in einem n-Tupel von Zahlen besteht: Wiederum bringt einen das endlose Studium von jeweils gegebenen Einzelfällen kaum weiter. Nützlicher ist es zum Beispiel im Falle linearer Gleichungssysteme, die allgemeine Lösbarkeit einschlägiger Probleme auf der Basis eines gründlichen Studiums endlichdimensionaler Vektorräume und linearer Abbildungen zu untersuchen. Im Falle nichtlinearer Gleichungen beziehungsweise Abbildungen müssen die Methoden der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler herhalten.

Genauso stellt sich die Situation dar, wenn die Lösung eines Problems in einem noch „komplizierteren“ mathematischen Objekt wie etwa einer Folge oder einer Funktion besteht. Das ist unter anderem in den unzähligen Situationen der Fall, wo eine Differential- oder eine Integralgleichung gelöst werden muß (beispielsweise zur Ermittlung der Bahn eines Himmelskörpers, der Ausbreitung einer Erdbebenwelle, der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems, der Schwingung einer Membran einer gewissen Gestalt und so weiter). In einer solchen Situation ist es noch viel schwieriger, eine einzelne Aufgabe in einem „singulären Gewaltakt“ zu lösen. Hier muß jeweils eine geeignete Gesamtheit von Funktionen, Folgen etc. mit den relevanten Strukturen (ein gewisser „Raum“) sowie die passende Art von Abbildungen zwischen solchen Räumen studiert werden. Diese Räume sind meist komplizierter als die vertrauten Räume $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen von diesen.

0.4. Ziele & Inhalte der VO

Ziele: (1) Bereitstellung und Vertiefung der wichtigsten top. Begriffe und Methoden, wie sie für einen modernen Ausbau der Analysis nötig sind.

(2) Einführung in die Grundprobleme + Denkweisen eines mod. math. Teilgebiets [CR] und das „Schmackhaftmachen" von Abstraktion.

Inhalte

$\boxed{0}$ Vorbemerkungen

$\boxed{1}$ Anschluss an die Analysis Vorlesungen
Metrische Räume 1 – Die Grundlagen

$\boxed{2}$ Topologische Räume – T ... die Grundlagen

$\boxed{3}$ Konvergenz – C

$\boxed{4}$ Stetigkeit – C^2

$\boxed{5}$ Erzeugen von Topologien – Das „innere Funktionieren" der Theorie

$\boxed{6}$ Kompaktheit – C^3

$\boxed{7}$ Zusammenhang – C^4

$\boxed{8}$ Metrische Räume 2 – Spezielle Resultate in MR

1. VO

0.0.5. Historische Anmerkungen – Ohne Anspruch auf Vollständigkeit

~1880 Georg CANTOR (1845–1918): Mengenlehre — GRUNDSTEIN

1902 David HILBERT (1862–1943) Umgebung

1906 Maurice FRÉCHET (1878–1973) Metrische Räume, Konvergenz mittels (abz.) Folgen in allg. Räumen, Kompaktheit

1908 Frigyes RIESZ (1880–1965) Ausgehend vom Konzept Häufungspunkt Vergleich von Punkt- und Funktionsmengen — VOR-GESCHICHTE

1914 Felix HAUSDORFF (1868–1942) top. Räume via Umgebungen, T_2, top Eig. MR

1922 Kazimierz KURATOWSKI (1896–1980) top. R. via Hüllenoperator

1925 Pavel ALEKSANDROV (1896–1982) moderne Def top. R. via offene Mengen

1940 Nicolas BOURBAKI kategorielle Konstruktionsprinzipien

1955 J.L. KELLEY erstes Auftreten des Terminus Topologie — GESCHICHTE

1 Anschluss an die Analysis-Vorlesung: Metrische Räume 1 – Die Grundlagen

[2 Vo, CS 4.3.]

1.1. Motivation. In diesem Kapitel wiederholen wir die Grundlagen über metrische Räume aus der Analysis-Vorlesung VI §15-17 in [Hö]. Unser Ziel ist es dabei den Abstandsbegriff aus den Definitionen der Konvergenz und der Stetigkeit zu eliminieren und eine Beschreibung dieser Begriffe in rein topologischen Termen [Umgebungen, offene Mengen] vorzubereiten, die dann ab KAP 2 unser Hauptthema bildet. Allerdings werden wir auch sehen, dass nicht alle Begriffe, die in metrischen Räumen definiert werden können auf der rein topologischen Ebene funktionieren.

Wir beginnen damit die Spuren von TC⁵ [topology, convergence, continuity, compactness, connectedness: Topologie, Konvergenz, Stetigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang] in den Analysis-Vorlesungen aufzudecken. Wir beziehen uns hier direkt auf [Hö; Günther Hörmann, Analysis-Skripten] und beginnen mit einer Begriffssammlung.

Begriffssammlung

Distanz, Abstand, Metrik — METRISCHE RÄUME

Cauchy-Folge
gleichmäßige
Stetigkeit

METRISCHE/UNIFORME RÄUME

Konvergenz
Stetigkeit
offene/abg. Menge
kompakte Menge

$\left.\begin{array}{l}\text{Randpunkt}\\ \text{innerer Punkt}\\ \text{äußerer —"—}\\ \text{isolierter —"—}\\ \text{Häufungspunkt}\end{array}\right\}$ einer Menge

$\left.\begin{array}{l}\text{Häufungswert}\\ \text{Grenzwert}\end{array}\right\}$ einer Folge

TOPOLOGISCHE RÄUME

beschränkte Menge

TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME

Relation der Begriffe und Konzepte ($\xrightarrow{\text{allgemeiner}}$ $\xleftarrow{\text{spezieller}}$)

$$\underbrace{(\mathbb{R}, |\ |)}_{\text{Analysis 1}} \subseteq \underbrace{(\mathbb{R}^n, \|\ \|)}_{\text{Analysis 2}} \subseteq \underbrace{\text{normierte Vektorräume} \subseteq \text{metrische VR}}_{\text{Funktionalanalysis}}$$

$$\subseteq \underbrace{\text{metrische Räume} \subseteq \text{uniforme R} \subseteq \text{topologische R}}_{\text{Topologie}}$$

Nun beginnen wir mit der Wiederholung der Grundbegriffe über metrische Räume. Für mehr Details siehe etwa [Hö, $\underline{\text{VI}}$, §15–§17], [Q, Kap 1].

<u>1.2 DEF</u> (Normierter Vektorraum) [Hö, 15.3]

Sei V ein Vektorraum (VR) über dem Körper $\mathbb{K}$ [$=\mathbb{R}, \mathbb{C}$].
Eine Abbildung

$$\|\ \|: V \to \mathbb{R}$$

heißt <u>NORM</u> auf V, falls gilt ($x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$)

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pos. definit)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (pos. homogen)

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ($\Delta$-Ungl.)

Wir nennen das Paar $(V, \|\ \|)$ [oder schlampig nur V] <u>normierten VR</u> [NVR].

1.3 DEF (Metrischer Raum) [Hö, 15.1]

Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

heißt METRIK (Abstandsfunktion) auf X, falls gilt ($x, y, z \in X$)

(D1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (pos. definit)

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetrisch)

(D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Δ-Ungl.)

Wir nennen das Paar (X,d) [oder schlampig nur X] einen metrischen Raum [MR].

1.4 BSP (NVR & MR) [siehe auch UE, 2-4]

(i) Der $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] mit der Euklidischen Norm

$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$ ($\langle\,|\,\rangle$ ... Standardskalarprod.)

[$\|z\|_2 := \sqrt{\langle z|z\rangle} = \sqrt{\sum |z_i|^2}$ ($\langle x|y\rangle = \sum x_i \bar{y}_i$ — " —)

ist ein NVR. In dieser Vorlesung werden wir – wenn nicht explizit anderes gesagt wird – $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] immer mit der $\|\ \|_2$ versehen.

(ii) p-Norm: Auf $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} & 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & p = \infty \end{cases}$$

Damit wird $\mathbb{R}^n$ [$\mathbb{C}^n$] zu einem NVR [Hö, 15.6].

Im Fall $p=\infty$ sprechen wir auch von der Maximums-, Supremums- oder Unendlichnorm. Der Fall $p=2$ ist gerade (i).

(iii) (NVR $\to$ MR) Sei $(V, \|\ \|)$ ein NVR, dann ist

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf V. [Hö 15.4]

(iv) Die diskrete Metrik. Sei M eine beliebige Menge, dann ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf M, genannt diskrete Metrik.
[Hö 15.2]

1.5 DEF (offene ε-Kugel) Sei (X,d) MR, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

$\overbrace{\text{(offene) } \varepsilon\text{-Kugel um } x}$ [Hö, 15.7]
$\leadsto$ Rechtfertigung in 1.16

1.6 DEF (Konvergenz) Sei (X,d) MR, $(x_n)_n$ Folge in X, $x \in X$.

$$x := \lim x_n \ :\Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \underbrace{d(x_n,x) < \varepsilon}_{x_n \in B_\varepsilon(x)}$$

1.7 MOTIVATION. Wir werden im Folgenden den Abstandsbegriff aus der Formulierung der Konvergenz eliminieren. Dabei begegnen wir zum ersten Mal dem Schlüsselbegriff der Umgebung. Er ist der Schlüssel, um Konvergenz ohne Rücksichtnahme auf eine Distanzmessung zu formulieren. [2. VO, CS ↓ 3. VO, CS, p. 3. ↓]

1.8 DEF (Umgebung) Sei (X,d) MR, $x \in X$, $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

1.9 BEOBACHTUNG (zum Umgebungsbegriff)

(i) Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist also Umgebung von x.

(ii) Jede Obermenge einer Umgebung ist ebenfalls eine Umgebung

1.10 PROP (Limes mittels Umgebungen) [Hö 16.1] (X,d) MR

$$x = \lim x_n \iff \forall U \text{ Umgebung von } x \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ x_n \in U$$

Beweis

($\Rightarrow$) Sei U Umgebg von $x \overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon \ B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} \exists N \ \forall n \geq N \ x_n \in B_\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow x_n \in U$

($\Leftarrow$) Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist „ja eh schon" Umgebg v. x [1.9(i)] $\square$

1.11 MOTIVATION. Was uns eben mit der Konvergenz gelungen ist, versuchen wir nun mit der Stetigkeit — also eliminieren wir den Abstandsbegriff aus der Formulierung der Stetigkeit, wieder mittels des Begriffs der Umgebung. Zunächst aber die Def [Hö 16.7]

1.12 DEF (Stetigkeit) Sei $f:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ eine Abb zwischen MR. f heißt stetig in $x\in X_1$, falls

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X_1:\ \underbrace{d_1(x,x')<\delta}_{x'\in B_\delta(x)}\Rightarrow\underbrace{d_2(f(x),f(x'))<\varepsilon}_{f(x')\in B_\varepsilon(f(x))}.$$

f heißt stetig auf X_1, falls f stetig in x $\forall x\in X_1$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{f(B_\delta(x))\subseteq B_\varepsilon(f(x))}$$

$$\overset{\Downarrow}{B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))}$$

1.13 PROP (Stetigkeit mittels Umgbg) $f:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ stetig in $x\in X_1$

$\Longleftrightarrow$ $\forall U$ Umg. von $f(x)$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebg von x

Beweis ($\Rightarrow$)

U Umgebg von $f(x)\overset{1.8}{\Longrightarrow}\exists\varepsilon>0: B_\varepsilon(f(x))\subseteq U$

$\overset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow}\exists\delta>0:\ B_\delta(x)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$

$\overset{1.8}{\Longrightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umgebg von x

$\overset{1.9(iii)}{\Longrightarrow} f^{-1}(U)\supseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ — " —

($\Longleftarrow$) Sei $\varepsilon > 0 \overset{1.10(i)}{\Longrightarrow} B_\varepsilon(f(x))$ Umgebung von $f(x)$

$\overset{\text{Voraus}}{\Longrightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umg. von x

$\overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0 \; B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ ✓]

1.14 MOTIVATION. Als nächstes wollen wir die Stetigkeit einer Fkt auf ganz X ohne Verwendung des Abstandsbegriffs fassen. Dabei tritt erstmals der Begriff der Topologie auf: die offene Menge. Zunächst die Def [Hö, 15.9]

1.15 DEF. $O \subseteq X$ MR heißt offen, falls

$$\forall x \in O: \; O \text{ ist Umg. v } x \quad \left[\overset{1.8}{\Longleftrightarrow} \forall x \in O \; \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq O\right]$$

[Um jedes $x \in O$ gibt es eine ganze „ε-Schutzkugel", die ganz in O liegt. Je näher x zum „Rand" von O liegt, desto kleiner muß ε sein.]

1.16 PROP Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist offen [Hö 15.10(i)]

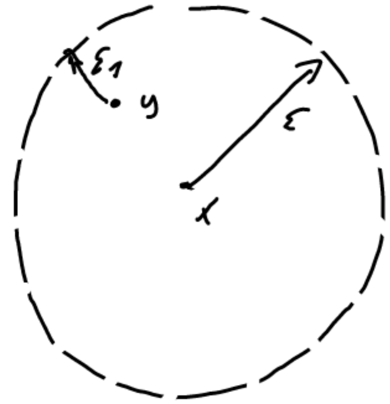
1.17 BEM (Zu offenen Mengen) [vgl Hö, 15.10-11]

(i) 1.16 besagt also, dass $B_\varepsilon(x)$ nicht nur Umgebung von x ist [1.10(i)], sondern auch $\forall y \in B_\varepsilon(x)$

(ii) $\emptyset, X$ sind in jedem MR (X,d) offen.

(iii) Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind: $\mathbb{R}, \emptyset$, alle (a,b) und alle $\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$; das sind schon alle [o.B]

Beweis 1.16. Sei $y \in B_\varepsilon(x)$. Setze $\varepsilon_1 := \varepsilon - d(x,y)$ (>0).



Dann ist $B_{\varepsilon_1}(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$, denn sei $z \in B_{\varepsilon_1}(y)$, dann gilt

$$\underline{d(z,x)} \le d(z,y) + d(y,x) \underline{<} \varepsilon_1 + d(y,x) = \varepsilon - d(x,y) + d(x,y) = \underline{\varepsilon}$$ □

1.18 Prop (Stetigkeit via offene Mengen) Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$

f stetig auf $X_1 \iff \forall O$ offen in X_2 ist $f^{-1}(O)$ offen in X_1

Beweis ($\Rightarrow$)

O offen in X_2 [zz. $f^{-1}(O) \subseteq X_1$ offen $\iff \forall x \in f^{-1}(O): f^{-1}(O)$ Umg. v. x]

Sei $x \in f^{-1}(O)$, d.h. $f(x) \in O$

$\xRightarrow{O \text{ offen}}$ O Umgebung von $f(x)$ $\xRightarrow{1.13}$ $f^{-1}(O)$ Umg von x

($\Leftarrow$) Sei $x \in X_1$, U Umg. von $f(x)$

$\xRightarrow{1.8} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$; und $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq X_2$ offen (1.16)

$\xRightarrow{\text{Voraus}} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq X_1$ offen

außerdem $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ wegen $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$

$\xRightarrow{1.17(i)} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umgebung von x

$\xRightarrow{1.9(ii)} f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ Umgebung von x. □

[3. VO, CS ↓
4. VO, CS ↓ 11.3]

1.19. ZUSAMMENFASSUNG 1 Wir fassen zusammen in wie weit wir den Distanzbegriff wirklich aus den Formulierungen der Begriffe Konvergenz & Stetigkeit eliminiert haben. Sei (X,d) MR. Dann gilt

SPRACHE der MR

•) U Umg. v. $x \in X \overset{1.8}{\iff} \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$

•) O offen $\overset{1.15}{\iff}$ O ist Umgebung aller ihrer Pkte

•) $x = \lim x_n \overset{1.10}{\iff} \forall U$ (Umg v. x) $\underbrace{\exists N\ \forall n \geq N\ x_n \in U}_{x_n \text{ schließlich in } U}$

analog f. HW

[•) x HW von $x_n \iff \forall U$ (Umg. v x) $\underbrace{\forall N\ \exists n \geq N\ x_n \in U}_{x_n \text{ immer wieder in } U}$]

[UE, 9]

•) f stetig in $x \overset{1.13}{\iff} f^{-1}$(Umg v. $f(x)$) ist Umg v. x

•) f stetig $\overset{1.18}{\iff} f^{-1}$(offen) ist offen

SPRACHE der TOPOLOGIE

Wir werden sehen

(i) Die Sprache der Topologie ist viel allgemeiner als die Sprache der MR; sie ermöglicht es über Konvergenz & Stetigkeit in viel allgemeineren Räumen als MR zu sprechen

(ii) Auch die anderen Begriffe der Begriffssammlung 1.1 in der Sprache formuliert werden können – Mit 2 Ausnahmen

1.20 BEM (CF & glm Stetigkeit sind keine top. Begriffe)

(i) Cauchy-Folgen können nicht in der Sprache der Top formuliert werden. Wieso das?

VERSUCH:

$$(x_n)\ CF \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n,m\geq N\ \underbrace{d(x_n,x_m)<\varepsilon}_{x_m\in B_\varepsilon(x_n)}$$

$\iff \forall U$ (Umg von x_n .... HILFE, welches n?

STOP: Alle x_n müssten Umgebungen gleicher Größe besitzen - Was aber heißt „gleich groß" oder auch „kleiner", „größer" bei Umgebungen verschiedener Pkte ohne Zuhilfenahme eines Abstandsbegriffs?

[Bei einem fixen Pkt x ist es ja klar
$\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$ ... $B_{\varepsilon_1}(x)\subseteq B_{\varepsilon_2}(x)$ ... $U_1\subseteq U_2$ ...]

(ii) Ähnliches passiert beim Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit.

f glm stetig $\iff$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x'\ \underbrace{d_1(x,x')<\delta}_{x'\in B_\delta(x)} \Rightarrow \underbrace{d_2(f(x),f(x'))<\varepsilon}_{f(x')\in B_\varepsilon(f(x))}$$

Wiederum bräuchten wir $\forall x$ Umg. vergleichbarer Größe — das geht aber nicht ohne Abstandsbegriff

(iii) Tatsächlich können Begriffe wie CF & glm Stetigkeit in etwas allgemeineren Räumen als MR definiert werden: den UNIFORMEN RÄUMEN. Diese erlauben genau einen Vergleich von Umgebungen verschiedener Pkte ...

1.21 ZUSAMMENFASSUNG 2. (Spuren von TC^4)

(i) Wir haben bisher die Spuren von TC^2 in den Analysis-Vorlesungen aufgedeckt

T ... topology: Umgebungen 1.8, offene Mengen 1.15
C ... convergence: Konvergenz 1.6, 1.10
C ... continuity: Stetigkeit 1.12, 1.13, 1.18

Wo sind aber die Spuren vom Rest, also C^3, C^4?

(ii) C^3... compactness. Das tritt z.B. im Satz vom Max auf

{ Jede stetige Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt auf dem (kompakten) Intervall $[a,b]$ Max & Min an. }

Dahinter steckt der folgende top. Satz.

[Stetige Bilder kp Mengen sind kp.]

Hier: $f([a,b])$ ist kp $\underset{[\text{Hö } 17.3]}{\overset{\text{Heine Borel}}{\Longrightarrow}}$ beschr. & abg. wobei

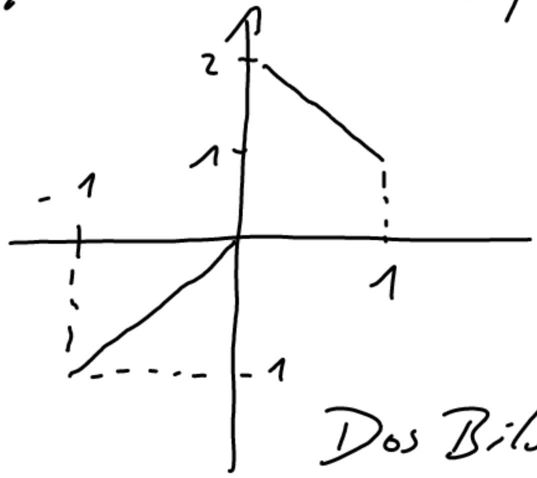
beschränkt $\Rightarrow$ $f([a,b])$ hat endliches sup & inf

abgeschlossen $\Rightarrow$ sup & inf gehören zu $f([a,b])$ sind also Max & Min

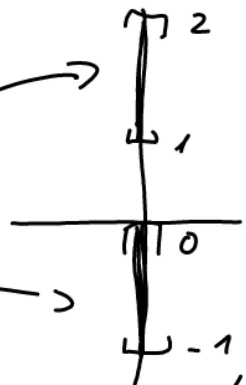
(iii) C... <u>connectedness</u> steckt z.B. im <u>Zwischenwertsatz</u>

Nimmt eine stetige Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall die Werte c, d $[c < d]$ an, so auch alle Werte zwischen c und d.

Zur Illustration ein Bsp einer unstetigen Fkt $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$



$$f([-1,1]) = [-1,0] \cup [1,2]$$



Das Bild $f([-1,1])$ „zerreisst" in 2 Stücke, obwohl der Defbereich $[-1,1]$ aus einem Stück besteht. Offenbar bedingt die Unstetigkeit dieses <u>Zerreissen</u>!

Der ZWS besagt also, dass das bei stetigen Fkt <u>nicht</u> passieren kann, also die Bildmenge nur aus einem Stück besteht, falls die Defmenge aus einem Stück besteht.

Dahinter steckt der top. Satz

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.

[4. VO, CS
5. VO, RS | 16.3]

2 Topologische Räume

2.1. Einleitung. Wir haben in Kap [1] ausgehend vom Abstandsbegriff die Konzepte offene Menge bzw. Umgebung als Kern der topologischen Sprache entdeckt; Damit haben wir topologische Begriffe aus der Analysis ohne Bezugnahme auf einen Abstandsbegriff formuliert.

Nun drehen wir den Spieß um und geben ein Axiomensystem (Definition) für offene Teilmengen bzw. Umgebungen in beliebigen Mengen an. Diese Axiomensysteme sind sehr allgemein und erlauben es uns daher in sehr allgemeinen Situationen die Konzepte von Konvergenz und Stetigkeit zu formulieren — also Topologie zu betreiben.

Wir beginnen mit dem Axiomensystem für offene Mengen. Motivation dafür sind die Eigenschaften offener Mengen in $\mathbb{R}$; siehe [UE, 6].

2.2 Notation. Sei X eine Menge, dann bezeichnen wir mit 2^X die Potenzmenge von X (die Menge aller Teilmengen von X).

Eine Menge deren Elemente wiederum Mengen sind bezeichnen wir als Mengen-familie oder Mengensystem.

§2.1. Grundlegende Definitionen und Beispiele

<u>2.3 Def</u> (Topologie, topologischer Raum)

(i) Sei X eine Menge. Eine <u>Topologie auf X</u> ist eine Teilfamilie $\mathcal{O}$ von 2^X mit den Eigenschaften

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$

(O2) Beliebige Vereinigungen von $\mathcal{O}$-Mengen liegen wieder in $\mathcal{O}$, d.h.

$$O_i \in \mathcal{O} \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

(O3) Endliche Durchschnitte von $\mathcal{O}$-Mengen liegen wieder in $\mathcal{O}$, d.h.

$$O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}.$$

(ii) Ein <u>topologischer Raum</u> (TR) ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, wobei X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Top. auf X ist.

(iii) Die Teilmengen O von X, die zu $\mathcal{O}$ gehören heißen <u>offen</u>. Die Komplemente offener Mengen heißen <u>abgeschlossen</u>. [d.h. $A \subseteq X$ abg. $:\Leftrightarrow$ $X \setminus A \in \mathcal{O}$]

2.4 BSP (Bsp TR)

(i) Jede MR (X,d) wird zum TR mittels der Def

$$\mathcal{O} := \{ O \subseteq X \mid \underbrace{\forall x \in O\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O}_{O \text{ offen im Sinne von } 1.15.} \}. \quad (*)$$

Tatsächlich gelten (O1)-(O3) wegen [UE, 6].

(ii) Ein Spezialfall von (i): Jede Teilmenge A eines NVR $(V, \|\ \|)$ wird mittels $d(x,y) = \|x-y\|$ und $(*)$ zum TR.

(iii) Ein Spezialfall von (ii): Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit $|\ |$ bzw. $\|\ \|_2$ ist TR. Die so entstehende Topologie heißt die natürliche Top. $\mathcal{O}_n$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. [Die offenen Mengen sind gerade die offenen Mengen im Sinne der Analysis]

(iv) Auf $\mathbb{R}$ ist die Menge aller offenen Intervalle der Form $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ eine Top. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{O}_<$ [Beweis: UE, 10]

(v) Die kofinite Topologie auf einer bel. Menge X ist definiert durch

$$\mathcal{O}_{co} := \{ A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ endlich} \} \cup \emptyset.$$

[Beweis: UE 10]

2.5 BSP (Extremfälle von Top.)

Sei X eine beliebige Menge.

(i) Die diskrete Topologie ist definiert als $\mathcal{O}_{dis} = 2^X$,
d.h. jede Teilmenge von X ist offen.

(ii) Die Klumpentopologie oder triviale Top. $\mathcal{O}_{Kl} = \{\emptyset, X\}$,
d.h. nur X und $\emptyset$ sind offen.

[In beiden Fällen ist (O1)-(O3) klar!]

2.6 BEM (Vergleich von Top.)

Da Tops. Teilmengen von 2^X sind, kann man die Tops. auf einer fixen Menge X der Größe nach vergleichen. So gilt z.B. für jede Top $\mathcal{O}$ auf X

$$\mathcal{O}_{Kl} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{dis}.$$

Wir schreiben meist $\leq$ statt $\subseteq$ d.h. wir definieren

$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \ :\Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 .$$

Wir sagen dann $\mathcal{O}_1$ ist gröber als $\mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_2$ ist feiner als $\mathcal{O}_1$. Die feinere Top. hat mehr offene Mengen (dafür typischerweise "kleinere" offene Mengen) als die gröbere Top.

$\leq$ ist eine Ordnung (refl. trans. antisym. Relation)

auf der Menge der Tops auf einer fixen Menge X;
Aber keine Totalordnung (d.h. im Allgemeinen sind zwei Tops auf X nicht vergleichbar; siehe [ÜE 12]).

§2.2. BASIS UND SUBBASIS EINER TOP

2.7 MOTIVATION (Weniger Arbeit / mehr Flexibilität beim Angeben von Tops)

Bisher haben wir Topologien durch Angabe des gesamten Systems der offenen Mengen festgelegt; das ist für viele Zwecke unhandlich und es stellt sich die Frage, ob es nicht ausreichend ist eine kleinere Familie von 2^X anzugeben, die dann bereits $\mathcal{O}$ festlegt.

So ein Mechanismus würde Arbeit ersparen und die Flexibilität erhöhen; z.B. kann so die gröbste / feinste Top angegeben werden, die gewisse Eigenschaften hat [vgl. [J] p. 14].

Die diesbezüglichen Schlüsselbegriffe sind

2.8 DEF (Basis, Subbasis) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R.

(i) Eine Teilfamilie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$ heißt Basis von $\mathcal{O}$, falls jedes $O \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

(ii) Eine Teilfamilie $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}$ heißt Subbasis von $\mathcal{O}$, falls die Familie $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ $(S_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N})$ Basis von $\mathcal{O}$ ist.

2.9 BEM (Basis, Subbasis)

(i) Eine Basis ist also eine Familie, die immerhin so reichhaltig ist, dass jede offene Menge Vereinigung von Basismengen ist, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}$: $O = \bigcup_{i \in I} B_i$ mit $B_i \in \mathcal{B}$, I passend.
Wir verwenden hier die Konvention $\bigcup_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$.

(ii) Alternative Charakterisierung von Basen

$$\forall O \in \mathcal{O}: O = \bigcup_{i \in I} B_i \ (B_i \in \mathcal{B}) \iff \forall O \in \mathcal{O}\ \forall x \in O\ \exists B_x \in \mathcal{B}: x \in B_x \subseteq O$$

$(\Rightarrow)$ $O = \bigcup_{i \in I} B_i$, $x \in O \Rightarrow \exists i_0: x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = O$

$(\Leftarrow)$ $O = \bigcup_{x \in O} B_x$ oder $O = \emptyset \left[= \bigcup_{i \in \emptyset} B_i\right]$

(iii) Eine Subbasis ist eine Familie, die immerhin so reichhaltig ist, dass jede offene Menge als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Subbasismengen geschrieben werden kann, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}$: $O = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ mit $S_{ij} \in \mathcal{S}$, I, $n_i \in \mathbb{N}$ passend.
Wir verwenden hier die Konvention $\bigcap_{i \in \emptyset} B_i = X$

2.10 Bsp (Basis, Subbasis)

(i) Basis für die triviale Top ist $\{X\}$

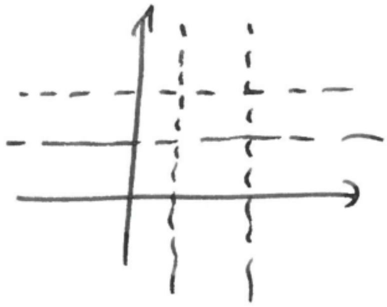
— " — diskrete — " — $\{\{x\} \mid x \in X\}$

— " — natürliche Top auf $\mathbb{R}$ sind die offenen Intervalle

— " — — $\mathbb{R}^n$ — " — Kugeln

Aber auch die offenen Kugeln mit rationalem Radius und rationalen Mittelpunktskoordinaten – und davon gibt es nur abzählbar viele! [Beweis UE]

(ii) Eine Subbasis für die natürliche Top auf $\mathbb{R}^2$ sind die offenen Streifen



2.11 SATZ (Grundeigenschaften von Basen) Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R. und $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{O}$. Dann gilt

(B1) $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = X$

(B3) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Beweis: (B1) $X \underset{X \text{ offen}}{=} \bigcup\limits_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq X$

(B3) $B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ x \in B_1 \cap B_2 \overset{(O3)}{\Longrightarrow} B_1 \cap B_2$ offen $\overset{2.9(ii)}{\Longrightarrow} \exists B_3 \in \mathcal{B}:$
$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ $\square$

Durch die Vorgabe einer Basis ist $\mathcal{O}$ nun tatsächlich festgelegt (vgl. 2.7) – und zwar eindeutig...

2.12 SATZ (Top via Basis)

Sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ ein Teilsystem von 2^X, das (B1), (B3) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{\bigcup_{i\in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, I \text{ beliebig}\}$$

eine Topologie auf X. $\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis: (O1): $\bigcup_{i\in\emptyset} B_i = \emptyset \in \mathcal{O}$ (nach Konvention)

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \overset{(B1)}{=} X \in \mathcal{O}$$

(O2): $O_i \in \mathcal{O}\ (i\in I) \Longrightarrow O_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}\ \ (B_{ij}\in\mathcal{B})$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} B_{ij} \in \mathcal{O}$$

(O3): $O_1,\dots,O_n \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{ij}\ \ (B_{ij}\in\mathcal{B})$

$$\Longrightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j\in J_i} B_{ij} \overset{(DG)}{=} \bigcup_{\substack{j_i\in J_i\\ i=1,\dots,n}} B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}$$

Sei $x\in B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n} \underset{+\text{Induktion}}{\overset{(B3)}{\Longrightarrow}} \exists B_x \in\mathcal{B} : x\in B_x \subseteq B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}$

$$\Longrightarrow B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n} = \bigcup_{x\in B_{1j_1}\cap\dots\cap B_{nj_n}} B_x \in \mathcal{O}$$

$$\overset{(O2)}{\Longrightarrow} \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}.$$

$\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ direkt aus der Def von $\mathcal{O}$.

Jede Topologie $\mathcal{O}'$ auf X mit Basis $\mathcal{B}$ besteht genau aus den $\bigcup_{i\in I} B_i$ und ist somit gleich $\mathcal{O}$. $\square$

2.12 ABEM

Auch Subbasen „regeln" Topologien fest, mit dem zusätzlichen „Zuckerl", dass Subbasen keine Grundeigenschaften haben. (oder per Konvention $\bigcap_{i\in\emptyset} S_i = X$). Also definieren beliebige Teilsysteme von 2^X als Subbasen eindeutig eine Top; genau

2.13 Satz (Top via Subbasis) Sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ ein (BELIEBIGES?) Teilsystem von 2^X. Dann ist

$$\mathcal{O} := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij} \;\middle|\; S_{ij} \in \mathcal{S} \right\}$$

eine Topologie auf X. $\mathcal{S}$ ist Subbasis für $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}$ Top auf X ist reichtes zu zeigen, dass $\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} S_j \;\middle|\; S_j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \right\}$ die Eigenschaften (B1), (B3) erfüllt. Den Rest besorgt dann Satz 2.12.

(B1): $\bigcap_{j \in \emptyset} S_j = X \in \mathcal{B}$

(B3) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$; setze $B_3 = B_1 \cap B_2$

$[\Rightarrow x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \;]$

$\mathcal{S}$ ist Subbasis von $\mathcal{O}$ nach Definition. Jede Topologie $\mathcal{O}'$, die $\mathcal{S}$ als Subbasis besitzt besteht genau aus den Mengen $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ ist also gleich $\mathcal{O}$. $\square$

2.14 BEM (zu den Konstruktionen: Subbasis ⇝ Basis ⇝ Topologie)

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\ \bigcap_{i=1}^{n}\ } \mathcal{B} \xrightarrow{\ \bigcup_{i\in I}\ } \mathcal{O}$$

SUBBASIS	BASIS	TOPOLOGIE
Eig: leer$^{\circledast}$!	(B1) $X \in \mathcal{B}$ $\circledast$	(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
		(O2) $\bigcup_{i\in I}$
	(B3) $\bigcap_{i=1}^{n}$	(O3) $\bigcap_{i=1}^{n}$

$\circledast$ $X := \bigcap_{i=1}^{0} S_i$ (per Konv)

$\bigcap_{i=1}^{n}$ tritt nicht auf, da in Konstruktion $\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ eingebaut

$\circledast$ $\emptyset := \bigcup_{i\in\emptyset} B_i$

$\bigcup_{i\in I}$ tritt nicht auf, da in die Konstruktion $\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{O}$ eingebaut.

2.15 BSP (Produkt- und Boxtopologie) $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ top. Räume

(i) Wir definieren auf $X := \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i\}$

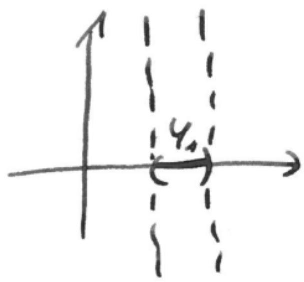
die Produkttopologie als die von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \Big\{ S = \prod_{i\in I} Y_i \;\Big|\; Y_i = X_i \ \forall i \in I \text{ mit Ausnahme eines einzigen } i_0 \in I;\ \text{für dieses sei } Y_{i_0} \in \mathcal{O}_{i_0} \text{ beliebig} \Big\}$$

erzeugte Top.

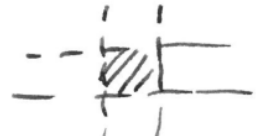
•) Ist $X = X_1 \times X_2$, dann sehen die Mengen in $\mathcal{S}$ so aus:

•) Wie sieht die Basis zugehörige Basis $\mathcal{B}_{prod}$ d. Produkttop aus?



(a) I endlich: die typischen Basismengen sind "offene Quader" $\prod_{i\in I} Y_i$, $Y_i \in \mathcal{O}_i$

(b) I unendlich: die typischen Basismengen sind "offene Quader"



von denen nur endlich viele $Y_i \neq X_i$ sind; in "fast allen" Richtungen ist $Y_i = X_i$.

Diese Quader sind "sehr groß" - also auch die offenen Mengen der Produkttop.

Warum nicht alle Quader $\prod_{i\in I} Y_i$ ($Y_i \in \mathcal{O}_i$ beliebig) genommen werden beantwortet

(ii) Wir definieren auf $\prod_{i\in I} X_i$ die <u>Boxtopologie</u> als die von der Basis

$$\mathcal{B}_{Box} := \left\{ \prod_{i\in I} Y_i \;\middle|\; Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig} \right\}$$

erzeugte Top. (Beweis ÜE)

•) Ist $\underline{|I|<\infty}$ dann gilt: $\mathcal{B}_{Prod} = \mathcal{B}_{Box} \Rightarrow \underline{\mathcal{O}_{Prod} = \mathcal{O}_{Box}}$

•) Ist <u>I unendlich</u> dann: $\mathcal{B}_{Box} \supsetneq \mathcal{B}_{Prod} \Rightarrow \underline{\mathcal{O}_{Box} \supsetneq \mathcal{O}_{Prod}}$

Im Allgemeinen ist die Boxtopologie also <u>feiner</u> als die Produkttopologie!

[In gewisser Weise ist die Boxtop zu fein, um nützlich zu sein; in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ x=(x_1,x_2,\dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$ dem Raum der reellen Folgen mit $\mathcal{O}_{Box}$ gilt: $\frac{1}{n} x \not\to 0 \quad (n\to\infty)$

Somit wäre $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{Box})$ kein topologischer VR!

Das Box-Produkt kp Mengen ist i. A. nicht kp.]

---

§2.3 UMGEBUNGEN

<u>2.16 MOTIVATION + ANKÜNDIGUNG</u>: In diesem § befassen wir uns mit dem zentralen Begriff der <u>Umgebung</u> in t.R. Insbesondere werden wir sehen, dass auch die Vorgabe von "Umgebungssystemen" resp "Umgebungsbasen" eine Top. festlegen (analog Basis / Subbasis ...).

2.17 DEF (Umgebung(ssystem)) Sei $(X,\mathcal{O})$ tR und $x\in X$.

(i) $U\subseteq X$ heißt Umgebung von x $:\Leftrightarrow \exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U$

(ii) Die Familie $\mathcal{U}_x := \{V\subseteq X \mid V \text{ Umgebung von } x\}$ [vgl. 1.12]

heißt Umgebungssystem von x (bzgl $\mathcal{O}$).

2.18 PROP $(X,\mathcal{O})$ tR. $G\subseteq X$:

$$G \text{ offen (dh } G\in\mathcal{O}) \iff \forall x\in G: G\in\mathcal{U}_x$$

(Eine Menge ist genau dann offen wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist; vgl. 1.15.)

Beweis: "$\Rightarrow$" $G\in\mathcal{O}, x\in G \Rightarrow x\in G\subseteq G \overset{2.17(ii)}{\Longrightarrow} G\in\mathcal{U}_x$

"$\Leftarrow$" Sei $x\in G \Rightarrow G\in\mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O_x\in\mathcal{O}: x\in O_x\subseteq G$

$$\Rightarrow G=\bigcup_{x\in G}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in G} O_x\subseteq G \Rightarrow G=\bigcup_{x\in G} O_x \overset{(O2)}{\Longrightarrow} G\in\mathcal{O}$$

$\square$

2.19 KOR Jede Umgebung U von x enthält eine offene Umgebung V von x. [Bemerke 2.17(i) verlangt nicht, dass Umgebungen selbst offen sind!]

Beweis: Setze $V:=O$ aus 2.17(i). $\rightarrow$ V offen und $x\in V$.
Nach 2.18 ist daher V Umgebung von x.

$\square$

2.19A. Satz (Grundeigenschaften von Umgebungssystemen)

Sei $(X, \mathcal{O})$ tR. Für die Umgebungssysteme $\mathcal{U}_x$ $(x \in X)$ gilt dann

(U1) $\forall U \in \mathcal{U}_x : x \in U$

(U2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$

(U3) $U \in \mathcal{U}_x \wedge V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

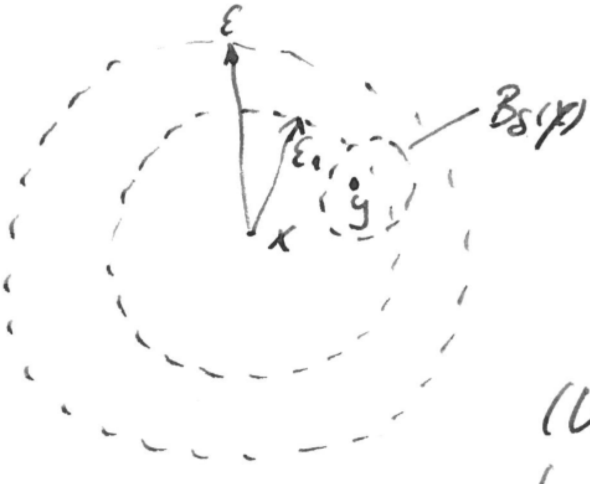
(U4) $\forall U \in \mathcal{U}_x \ \exists V \in \mathcal{U}_x : V \subseteq U \wedge \forall y \in V : U \in \mathcal{U}_y$

2.20 Bem (Bedeutung von (U4))

Die anschauliche Bedeutung von (U1)–(U3) sollte klar sein. (U4) wird in Beweisen als Ersatz für die Δ-Ungl in MR verwendet:

„Gegeben $U = B_\varepsilon(x)$ und $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, dann passt für jedes $y \in V = B_{\varepsilon_1}(x)$ noch eine δ-Kugel $B_\delta(y)$ um y in $U = B_\varepsilon(x)$ rein; $U = B_\varepsilon(x)$ ist also Umgebung von y"

(vgl. 1.16) Graphisch:



Im Fall von MR und ε-Kugeln ist die Verkleinerung allerdings ein „Luxus", da alle B_ε ja schon offen sind. Im Kontext von (U4) sollte eher an allg. Umgebungen gedacht werden! □

Beweis von 2.19A

(U1) $U \in \mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O \in \mathcal{O}: \ x \in O \subseteq U \Rightarrow x \in U$

(U2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}: x \in O_1 \subseteq U_1, \ x \in O_2 \subseteq U_2$

$\Longrightarrow x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2$

Wegen (O3) ist $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O} \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$

(U3) $U \in \mathcal{U}_x, V \supseteq U \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O \in \mathcal{O}: x \in O \subseteq U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

(U4) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}: \ x \in O \subseteq U$; setze $V := O$

$\overset{2.18}{\Longrightarrow} V \in \mathcal{U}_y \ \forall y \in V \overset{(U3)}{\Longrightarrow} U \in \mathcal{U}_y \ \forall y \in V$

2.21 SATZ (Topologie via Umgebungssysteme)

Sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{V}_x \subseteq 2^X$ gegeben, das (U1)–(U4) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{ O \subseteq X \mid \forall x \in O : O \in \mathcal{V}_x \} \quad \text{(was sonst?)}$$

eine Topologie auf X. Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{V}_x$ gerade das $\mathcal{O}$-Umgebungssystem von x und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis von 2.21. Zunächst ist $\mathcal{O}$ eine Topologie, denn

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, da $\forall x \in \emptyset \Rightarrow$ "alles"
$X \in \mathcal{O}$: $\mathcal{V}_x \neq \emptyset \Rightarrow \exists U \in \mathcal{V}_x \overset{(U3)}{\Longrightarrow} X \in \mathcal{V}_x$

(O2) $O_i \in \mathcal{O}$ $\forall i \in I$; sei $x \in \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists i_0 : x \in O_{i_0}$
$\Rightarrow O_{i_0} \in \mathcal{V}_x \overset{(U3)}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

(O3) $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O}$; sei $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \Rightarrow \forall i : x \in O_i \Rightarrow$
$\forall i : O_i \in \mathcal{V}_x \underset{\text{Induktion}}{\overset{(U2)}{\Longrightarrow}} \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}$

Wir zeigen nun $\mathcal{U}_x^{\mathcal{O}} = \mathcal{V}_x$ (also das $\mathcal{O}$-Umgebungssystem bei x ist gerade das gegebene $\mathcal{V}_x$).

Sei $\underline{U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}} \overset{2.17}{\Longrightarrow} \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subseteq U \overset{\text{Def } \mathcal{O}}{\Longrightarrow} O \in \mathcal{V}_x$
$\overset{(U3)}{\Longrightarrow} \underline{U \in \mathcal{V}_x}$

Sei $U \in \mathcal{V}_x$; definiere $\mathring{U} := \{y \in U \mid U \in \mathcal{V}_y\}$. Wir zeigen, dass $x \in \mathring{U}$ und $\mathring{U} \in \mathcal{O}$; damit folgt dann $U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}$.

- $x \in U$ (wegen (U1)) $\Rightarrow x \in \mathring{U}$
- Sei $y \in \mathring{U} \subseteq U \overset{(U4)}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{V}_y : V \subseteq U \wedge \forall z \in V : U \in \mathcal{V}_z$
$\Rightarrow V \subseteq \mathring{U} \overset{(U3)}{\Longrightarrow} \mathring{U} \in \mathcal{V}_y \ \forall y \in \mathring{U} \overset{\text{Def } \mathcal{O}}{\Longrightarrow} \mathring{U} \in \mathcal{O}$

Sei schließlich $\mathcal{O}'$ Top auf X mit $\mathcal{U}_x^{\mathcal{O}'} = \mathcal{V}_x$, dann gilt
$U \in \mathcal{O} \overset{2.18}{\Longleftrightarrow} \forall x \in U : U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}} = \mathcal{V}_x = \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}'} \overset{2.18}{\Longleftrightarrow} U \in \mathcal{O}'$.

$\square$

2.22 BEM In der Praxis werden jedoch oft nicht die Umgebungssysteme $\mathcal{U}_x$ vorgegeben [in MR alle Obermengen von $B_\varepsilon(x)$] sondern ein Teilsystem davon – die sog. Umgebungsbasen [in MR: $B_\varepsilon(x)$ oder auch nur $B_{\frac{1}{n}}(x)$]. Dies führt uns zu

2.23 DEF Sei $(X, \mathcal{O})$ tR, $x \in X$. Ein Teilsystem $\mathcal{W}_x$ von $\mathcal{U}_x$ heißt Umgebungsbasis (bzgl. $\mathcal{O}$) bei x, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}_x \ \exists W \in \mathcal{W}_x : (x \in) W \subseteq U$$

2.24 SATZ (Grundeigenschaften von Umgebungsbasen)
Sei $(X, \mathcal{O})$ tR. Für die Umgebungsbasen $\mathcal{W}_x$ $(x \in X)$ gilt dann

(UB1) $\forall W \in \mathcal{W}_x : x \in W \qquad (\hat{=}\, U1)$

(UB2) $\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x \ \exists W_3 \in \mathcal{W}_x : W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$

(UB4) $\forall W \in \mathcal{W}_x \ \exists V \in \mathcal{W}_x : V \subseteq W \wedge \forall y \in V \ \exists W_y \in \mathcal{W}_y : W_y \subseteq W$

Beweis [UE]

2.25 SATZ (Top via Umgebungsbasen)

Sei X eine Menge. Für jedes $x \in X$ sei ein nicht-leeres Mengensystem $\mathcal{V}_x \subseteq 2^X$ gegeben, das (UB1)-(UB4) erfüllt. Dann ist

$$\mathcal{U}_x := \{U \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{V}_x : (x \in) V \subseteq U\}$$

ein Umgebungssystem für eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X.

Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis (bzgl. $\mathcal{O}$) bei x und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

Beweis: Wir zeigen zunächst (U1)-(U4).

(U1) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V \subseteq U \; V \in \mathcal{V}_x \overset{(UB1)}{\Longrightarrow} x \in V \Rightarrow x \in U$

(U2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists V_i \in \mathcal{V}_x : x \in V_i \subseteq U_i \; (i=1,2)$

$\overset{(UB2)}{\Longrightarrow} \exists V_3 \in \mathcal{V}_x : V_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x$

(U3) $U \in \mathcal{U}_x,\ V \supseteq U \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x : W \subseteq U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$

NICHT VORGETRAGEN

(U4) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x \; (x \in) W \subseteq U$

$\overset{(UB4)}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{V}_x : V \subseteq W \wedge \forall y \in V \; \underbrace{\exists W_y \in \mathcal{V}_y : W_y \subseteq W}_{\Leftrightarrow W \in \mathcal{U}_y}$

$\Longrightarrow \exists V \in \mathcal{U}_y : V \subseteq U \wedge \forall y \in V : U \in \mathcal{U}_y$

Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ und per def. von $\mathcal{U}_x$ ist $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis bei x.

Offenbar ist $\mathcal{U}_x$ das einzige Umgebungssystem für das $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis ist; somit ist auch $\mathcal{O}$ eindeutig. $\square$

2.26 Bsp (Umgebungsbasen)

(i) Sei $(X,\mathcal{O})$ TR. Nach 2.19. bilden die offenen Umgebungen eine Umgebungsbasis.

(ii) Sei (X,d) MR; für $x \in X$ definiere

$$\mathcal{V}_x := \{ B_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0 \}.$$

Dann erfüllen die $\mathcal{V}_x$ (UB1)(UB2)(UB4) [Beweis, UE] die offenen ε-Kugeln sind also eine Umgebungsbasis (bzgl. der von der Metrik erzeugten Topologie).

(iii) Der Niemytzki-Raum

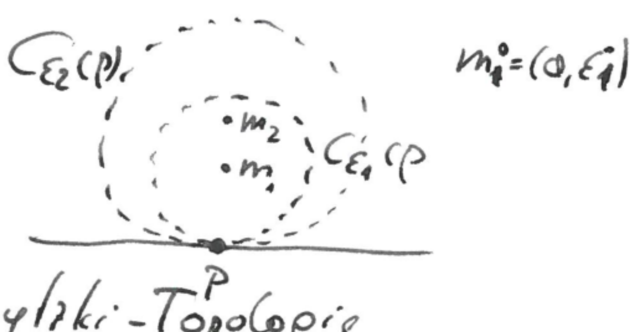
Sei $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \}$ (obere Halbebene)

Wir geben für jedes $p = (a,b) \in X$ eine Umgebungsbasis an

$b>0$: $\mathcal{W}_p = \{ B_\varepsilon(p) \mid 0 < \varepsilon \leq b \}$

$b=0$: $\mathcal{W}_p = \{ C_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0 \}$

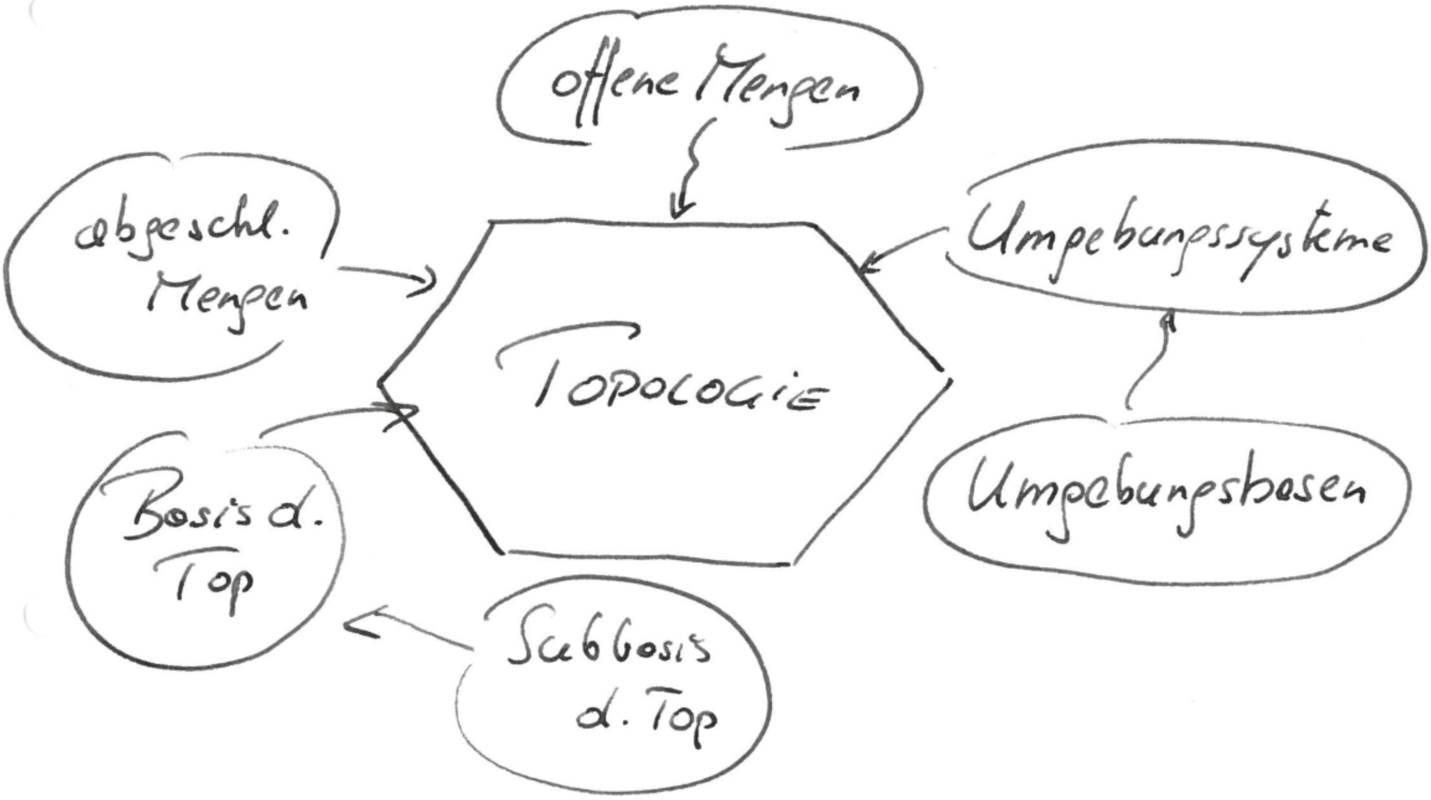
wobei $C_\varepsilon(p) = \{ q = (x,y) \in X \mid d(m,q) < \varepsilon \} \cup \{p\}$
und $m = (a, \varepsilon)$



(UB1)–(UB4) sind tatsächlich erfüllt (Beweis UE). Die so entstehende Topologie heißt <u>Niemytzki-Topologie</u>.

2.27 BEM (Der 6 bis 11-fache Pfad zur Topologie)

Wir haben neben der ursprünglichen Definition (offene Mengen) 2.3(ii) fünf weitere Zugänge kennengelernt, eine Topologie zu definieren. Dabei wurde jeweils ein Teilsystem von 2^X durch gewisse Axiome/Eigenschaften ausgesondert und gezeigt, dass dieses eindeutig eine Topologie festlegt



Genauer sind wir so vorgegangen

① Wir haben mit einem Ausgangsbegriff $\mathcal{A}$ begonnen, der mittels der Axiome (A1) - (Ak) definiert ist.

② Für ein gegebenes Objekt vom Typ $\mathcal{A}$ definieren wir einen weiteren Begriff $\mathcal{B}$

③ Wir zeigen für $\mathcal{B}$ gewisse Grundeigenschaften (B1)-(Bl).

④ Wir drehen den Spieß um und ernennen (B1) – (Bl) zu neuen Axiomen und betrachten Objekte, die (B1)-(Bl) erfüllen unabhängig von $\mathcal{A}$. Ausgehend von einem solchen $\mathcal{B}$-Objekt konstruieren wir ein Objekt, das (A1)-(Ak) erfüllt und zeigen, dass die Konstruktion aus ② wieder zum ursprünglichen $\mathcal{B}$-Objekt zurückführt.
Außerdem ist die durch das $\mathcal{A}$-Objekt bestimmte Topologie eindeutig.

Konkret etwa:

① Topologie (O1)-(O3); 2.3.	Basis 2.8, 2.11
② Umgebungssysteme 2.17	Subbasis 2.8.
③ (U1)-(U4) 2.19	keine? (Konv. $\bigcap_{i\in\emptyset} S_i = X$) 2.12A
④ Satz 2.21.	Satz 2.13
Gegeben $\mathcal{U}_x \dots \mathcal{O}$	Gegeben $\mathcal{S} \xrightarrow[\text{Beweis 2.13}]{} \mathcal{B} \xrightarrow[\text{Satz 2.12}]{} \mathcal{O}$

Die fehlenden 5 Zugänge sind

Abschlussoperator (Bem 2.41); Umgebungssubbasis; Basis der abg. Mengen; Subbasis der abg. Mengen; int-Operator

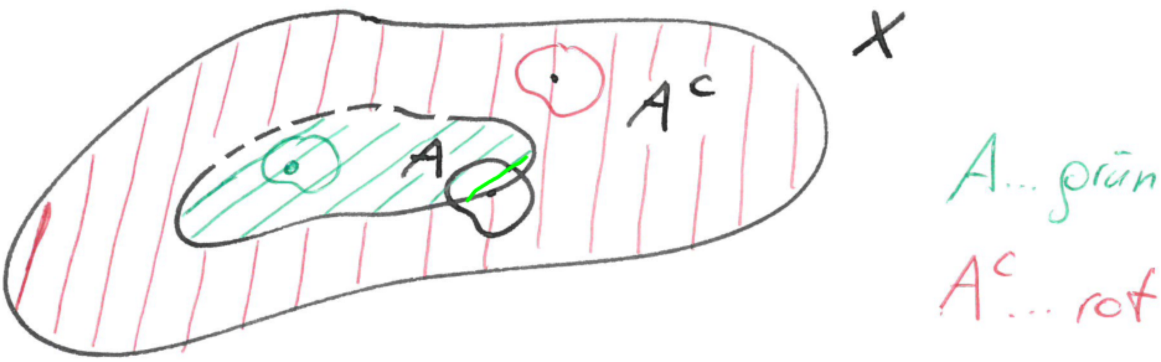
§2.4. Inneres, Äusseres, Rand, Isolierte Punkte & Häufungspunkte

2.28 Motivation (Inneres, Äußeres, Rand) Im folgenden sei immer $(X, \mathcal{O})$ top. Raum, $A \subseteq X$, $x \in X$.

Die Vorgabe einer Teilmenge $A \subseteq X$ teilt X

mengentheoretisch in A und $A^c = X \setminus A$,

topologisch in Inneres, Äußeres & Rand.



innen: Punkte, die eine grüne Umgebungen haben

außen: Punkte, die eine rote Umgebung haben

(Pkte, die eine einfärbige U haben.)

Rand: Punkte, die nur zweifärbige Umgebungen haben

2.29 DEF (Innere, äußere und Randpkte) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R., $A \subseteq X$, $x \in X$.

(i) x heißt innerer Punkt von $A :\Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A$ ($\mathcal{U}_x$ Umgebungssystem von x)

x heißt äußerer Punkt von $A :\Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A^c$ (d.h. $U \cap A = \emptyset$)

x heißt Randpunkt von $A :\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x :$

$$U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap A^c \neq \emptyset$$

(ii) $A^\circ \equiv \mathrm{int}(A) := \{x \,/\, x$ innerer Pkt von $A\}$

heißt <u>Inneres von A</u>

$\mathrm{ext}(A) := \{x \,/\, x$ äußerer Pkt von $A\}$ heißt <u>Äußeres von A</u>

$\partial A := \{x \,/\, x$ Randpkt von $A\}$ heißt <u>Rand von A</u>.

<u>2.30 BEOBACHTUNG</u> (direkte Konsequenzen aus 2.29)

(i) $\mathrm{int}(A) \subseteq A$; $\mathrm{ext}\, A \subseteq A^c$

∂A kann sowohl Punkte aus A als auch aus A^c enthalten; muß aber nicht; in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ gilt für $A = (0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$ jeweils $\partial A = \{0,1\}$

(ii) $\mathrm{int}(A^c) = \mathrm{ext}(A)$

$\mathrm{ext}(A^c) = \mathrm{int}(A)$

$\partial A = \partial(A^c)$

(iii) $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$, ∂A sind paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist ganz X; diese 3 Mengen bilden also eine <u>Partition</u> von X.

<u>2.31. BSP</u> in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$.

(i) $A = (0,1] \Rightarrow A^\circ = (0,1)$; $\mathrm{ext}(A) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

$\partial A = \{0,1\}$

(ii) $B = \mathbb{Q}$; da jedes Intervall sowohl rationale als auch irrationale Pkte enthält gilt

$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathrm{ext}\,\mathbb{Q} = \emptyset$.

2.32 PROP (Eigenschaften von int, ext, ∂)

int(A) und ext(A) sind offen; ∂A ist abgeschlossen

Beweis: •) $\underline{x \in int(A)} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x \ \ U \subseteq A$

$$\overset{(U4)}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{U}_x \ \forall y \in V: U \in \mathcal{U}_y \wedge U \subseteq A$$

$$\overset{2.29(i)}{\Longrightarrow} \forall y \in V: y \in int(A)$$

$$\Longrightarrow V \subseteq int(A)$$

$$\overset{(U3)}{\Longrightarrow} \underline{int(A) \in \mathcal{U}_x}$$

$\overset{2.18}{\Longrightarrow}$ int(A) ist offen

•) $ext(A) \overset{2.30(iii)}{=} int(A^c)$ ist offen

•) $\partial A \underset{2.30(iii)}{=} X \setminus (\underbrace{int(A) \cup ext(A)}_{\text{offen nach (O2)}})$ ist abgeschlossen. $\square$

2.33 PROP (Charakterisierung von A°)

A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist, d.h.
A° ist eindeutig bestimmt durch die 3 Eigenschaften

(i) A° ist offen

(ii) $A^\circ \subseteq A$

(iii) $\forall O$ offen $O \subseteq A \Rightarrow O \subseteq A^\circ$

Beweis (i) = 2.32

(ii) = 2.30(i)

(iii) Sei $O \subseteq A$ offen, $x \in O \Longrightarrow x \in O \subseteq A$

$\overset{2.28}{\Longrightarrow} x \in A^\circ$ $\qquad$ $O \in \mathcal{U}_x$ (2.18)

$\Longrightarrow O \subseteq A^\circ$

<u>Eindeutigkeit:</u> H erfülle ebenfalls

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} H \text{ offen} \\ H \subseteq A \end{array}\right\} \overset{(iii)}{\Longrightarrow} H \subseteq A^\circ \\ \forall O \subseteq A \text{ offen} \Rightarrow O \subseteq H \underset{\substack{\text{setze } O = A^\circ \\ \text{(möglich wegen (i), (ii))}}}{\Longrightarrow} A^\circ \subseteq H \end{array}\right\} \Rightarrow H = A^\circ$$

$\square$

<u>2.34 Prop</u> (Eigenschaften von int)

(i) $A^\circ \subseteq A$

(ii) $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(v) A offen $\Leftrightarrow A^\circ = A$

(vi) $A^{\circ\circ} = A^\circ$

<u>Beweis:</u> (i) = 2.30(i)

(ii) $x \in \emptyset^\circ \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : x \in U \subseteq \emptyset \Rightarrow$ Wid $\Rightarrow \emptyset^\circ = \emptyset$

$\forall x \in X: X \in \mathcal{U}_x \wedge X \subseteq X \Rightarrow x \in X^\circ \Rightarrow X \subseteq X^\circ$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} X = X^\circ$

(iii) $A \subseteq B \wedge \underline{x \in A^\circ} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x \; x \in U \subseteq A \subseteq B \Rightarrow \underline{x \in B^\circ}$

$\Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

(iv) •) $A \cap B \subseteq A, \subseteq B \overset{(iii)}{\Longrightarrow} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ, \subseteq B^\circ \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

•) 2.32(i) + (O3) $\Rightarrow A^\circ \cap B^\circ$ ist offen

(i) $\Rightarrow A^\circ \subseteq A \wedge B^\circ \subseteq B \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ $\Bigg\}$ $\overset{2.33(iii)}{\Longrightarrow} A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

(v) A offen $\overset{2.33(iii)}{\Longrightarrow} A \subseteq A^\circ$; $A = A^\circ \overset{2.32}{\Longrightarrow} A$ offen

(vi) A° offen nach 2.32 $\overset{(v)}{\Longrightarrow} A^{\circ\circ} = A^\circ$ $\square$

2.35 DEF (Abschluss(operator))

(i) $\bar{A} := A^\circ \cup \partial A$ heißt <u>Abschluß</u> von A.

(ii) Die Abb $c: 2^X \to 2^X$

$A \mapsto c(A) := \bar{A}$ heißt <u>Abschlußoperator</u>

2.36 BEOBACHTUNG (Unmittelbare Konsequenzen aus 2.35)

(i) $\bar{A}$ ist <u>abgeschlossen</u>, denn $\bar{A} = (\mathrm{ext}(A))^c$ + 2.32

(ii) $\underline{A \subseteq \bar{A}}$, denn $A \cap A^c = \emptyset \overset{2.30(i)}{\Longrightarrow} A \cap \mathrm{ext}(A) = \emptyset \overset{2.30(iii)}{\Longrightarrow} A \subseteq A^\circ \cup \partial A$

(iii) $\underline{\bar{A} = A^{c\circ c}}$ $\left(:= ((A^c)^\circ)^c\right)$, denn

$$\underset{2.30(iii)}{\bar{A} =} (\mathrm{ext}(A))^c \underset{2.30(ii)}{=} (\mathrm{int}(A^c))^c = ((A^c)^\circ)^c$$

(iv) $\underline{x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : A \cap U \neq \emptyset}$, denn

$$x \in \bar{A} \underset{2.30(iii)}{\Longleftrightarrow} x \notin \mathrm{ext}(A) \underset{2.29(i)}{\Longleftrightarrow} \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$$

(v) $\bar{A} = A \cup \partial A$

(vi) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ $\Bigg\}$ (Beweise im PS)

2.37 BSP in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$

(i) $A = (0,1] \Rightarrow \overline{A} = [0,1]$ (2.31 (ii))

(ii) $B = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{B} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

2.38 BEM Die Definition von $\overline{A} := A^\circ \cup \partial A$ ist zwar sehr anschaulich in Beweisen aber technisch aufwendig: für $x \in \overline{A}$ müssen die beiden Fälle $x \in A^\circ$ und $x \in \partial A$ unterschieden werden; Einfacher ist es daher meist mit

$\overline{A} = A^{coc}$ (2.36 (iii)) oder

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x: U \cap A \neq \emptyset$ (2.36(iv))

2.39 PROP (Charakterisierung des Abschlusses)

$\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

[d.h. vgl. 2.33]

Beweis. [UE; beherzige 2.38!]

2.40 PROP (Eigenschaften des Abschlußoperators)

(i) $A \subseteq \overline{A}$

(ii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(v) A abg $\Leftrightarrow \overline{A} = A$

(vi) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Beweis [UE; beherzige 2.38!]

2.41 BEM (Top via Abschlußoperator)

Eine historisch sehr frühe Definition einer Topologie benutzt den Abschlußoperator (Karatowskischer Hüllenoperator, 1922). In unserer Terminologie nimmt das die folgende Form an.

SATZ (Grundeigenschaften des Abschlußoperators)

(C1) $c(\emptyset) = \emptyset$ [= 2.40 (ii)]

(C2) $A \subseteq c(A)$ [= 2.40 (i)]

(C3) $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ [= 2.40 (iv)]

(C4) $c(c(A)) = c(A)$ [= 2.40. (vi)]

SATZ (Top via Abschlußoperator)

Sei X eine Menge und $c: 2^X \to 2^X$ ein Operator, der (C1) – (C4) erfüllt. Dann definiert

$$\mathcal{O} := \{ O \subseteq X \mid c(X \setminus O) = X \setminus O \}$$

eine Topologie auf X. Für jedes $A \subseteq X$ gilt $\bar{A} = c(A)$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

[o. Beweis]

2.42 Motivation (Häufungspunkte, isolierte Pkte)

Sei weiterhin $(X,\mathcal{O})$ t.R. $x \in X$, $A \subseteq X$.

Ein Punkt $x \in A$ kann "alleine" = isoliert "dasitzen" oder (in jeder Umgebung) die Gesellschaft weiterer A-Pkte genießen. Letzteres kann sogar für $x \notin A$ gelten; die gehören dann aber sicher zu ∂A.

2.43 Def (Häufungspkt & isolierter Pkt) Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R.

$x \in X$, $A \subseteq X$; $\mathcal{U}_x$ U-System bei x

(i) x heißt <u>Häufungspkt</u> (HP) von A

$$:\Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x\ \exists y \neq x : y \in U \cap A \quad [x \in A \vee x \notin A]$$

(ii) $A' := \{x \in X \mid x \text{ ist HP von } A\}$

(iii) x heißt <u>isolierter Pkt</u> (IP) von A

$$:\Longleftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}_x : U \cap A = \{x\} \quad [\Longrightarrow x \in A]$$

(iv) $\mathrm{Isol}(A) := \{x \in X \mid x \text{ ist IP von } A\}$

2.44. Beobachtung (Unmittelbar aus 2.43, 2.35)

(i) Vergleiche $A' := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset\}$$

[$x \in U \cap A$ "zählt" in A' "mit" in $\bar{A}$ nicht!]

(ii) Jedes $x \in A$ ist entweder IP oder HP von A, d.h. $A = \mathrm{Isol}(A) \cup (A' \cap A)$

2.45 Bsp (IP, HP) Wir betrachten $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$.

(i) $(0,1]' = [0,1]$

(ii) $A = [0,1] \cup \{2\}$; $\mathrm{Isol}(A) = \{2\}$, $A' = [0,1]$

(iii) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ haben keine HP in $\mathbb{R}$; alle natürlichen/ganzen Zahlen sind IP (in $\mathbb{R}$).

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \in \mathbb{Q}'$; $\mathbb{Q}$ hat keine IP (in $\mathbb{R}$).

2.46 Prop (Abschluss + HP)

$$\boxed{\bar{A} = A \cup A'}$$

[Das ist oft die Def von $\bar{A}$ ...]

Beweis: ($\subseteq$) $x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A$

oder $x \in \bar{A} \setminus A \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x \; U \cap A \neq \emptyset$

da $x \notin A \Rightarrow \exists y \neq x \in U \cap A$

($\supseteq$) $A \subseteq \bar{A}$ (2.36(ii))

$A' \subseteq \bar{A}$ (vergiß $y \neq x$ in 2.43(i)) $\square$

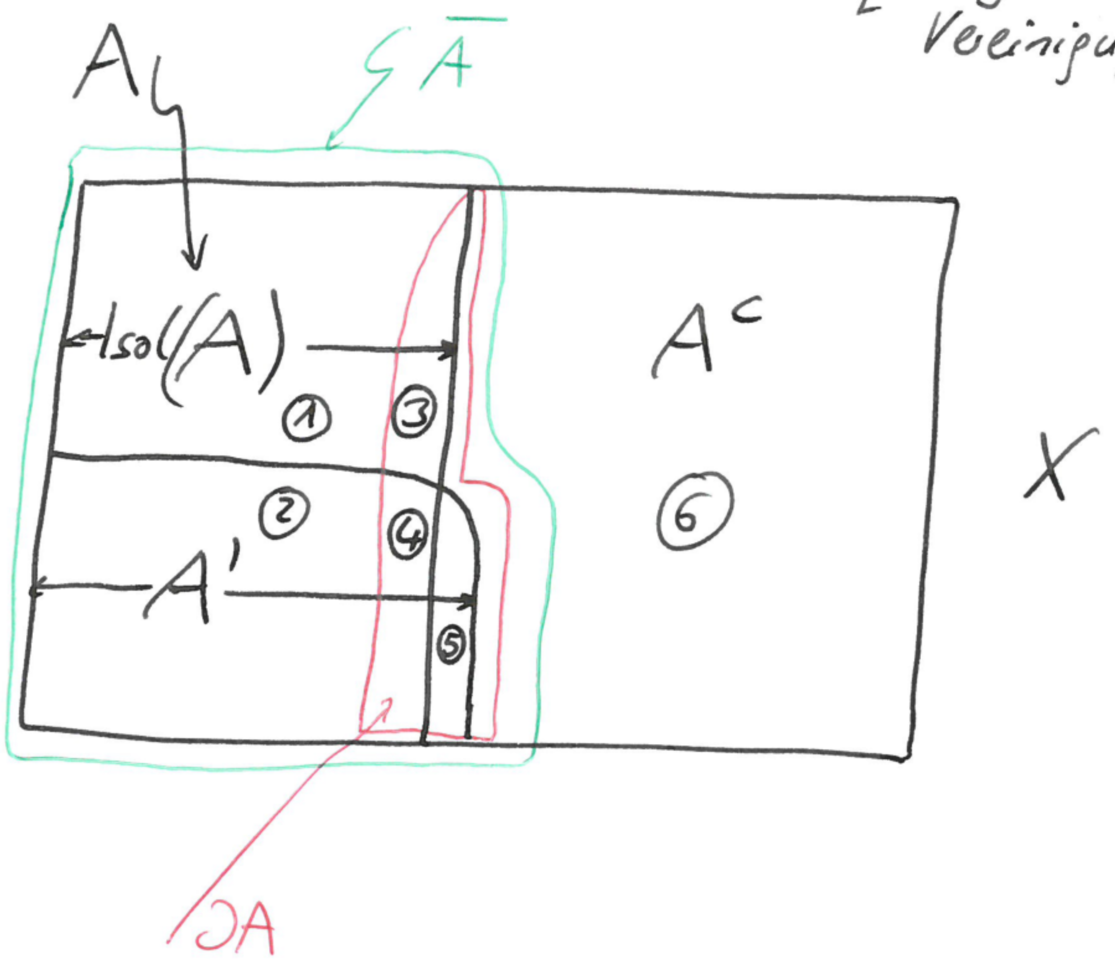
2.47 Kor $\boxed{\bar{A} = \mathrm{Isol}(A) \cup A'}$

Beweis: $\bar{A} \underset{2.46}{=} A \cup A' \underset{2.44(ii)}{=} (\mathrm{Isol}(A) \cup \underbrace{(A' \cap A)}_{\subseteq A'}) \cup A' = \mathrm{Isol}(A) \cup A'$ $\square$

2.48 BEM (int, ∂, ext vs HP, IP)

Das Verhältnis bzw. die Unterscheidung der Einteilg int-∂-ext und HP-IP ist garnicht so einfach. [siehe auch UE]. I.A. ergibt sich eine Partition von X in 6 Teilmengen

[disjunkt und Vereinigung ergibt alles]



$$\left.\begin{array}{ll} ① & Isol(A) \cap A^\circ \\ ② & A' \cap A^\circ \end{array}\right\} = A^\circ$$

$$\left.\begin{array}{ll} ③ & Isol(A) \cap \partial A \\ ④ & A' \cap A \cap \partial A \\ ⑤ & A' \setminus A \end{array}\right\} = \partial A$$

$$⑥ \quad ext(A) \qquad = ext(A)$$

§2.5. Dichtheit, Separabilität & Abzählbarkeitsaxiome

2.49 Motivation: In diesem letzten § des Grundlagenkp. wollen wir einige Eigenschaften TR diskutieren, die mit der "Größe" der Topologie zu tun haben ...

2.50 Def (Dichte TM & Separabilität) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R, $Y \subseteq X$

(i) Y heißt <u>dicht</u> in X $:\Longleftrightarrow \overline{Y} = X$

[d.h. $\forall x \in X: x \in \overline{Y}$
d.h. $\forall x \in X\ \forall U \in \mathcal{U}_x: U \cap Y \neq \emptyset$ (2.36(ii))
d.h. Jede Umgebung/jede offene Menge $\neq \emptyset$ enthält Y-Pkte]

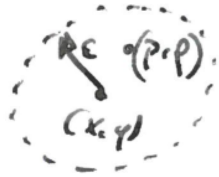
(ii) X heißt <u>separabel</u> $:\Longleftrightarrow \exists Y \subseteq X$ abzählbar und dicht.

2.51 Bsp (Separable Räume)

(i) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (2.37(ii)) $\Rightarrow \mathbb{R}$ separabel

$\mathbb{R}^n$ ist separabel denn $\mathbb{Q}^n$ ist dicht in $\mathbb{R}^n$

zB im $\mathbb{R}^2$



$p, q \in \mathbb{Q}$

(ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$ ist <u>nicht</u> separabel

$\forall Y \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow Y \in \mathcal{O}_{dis} \Rightarrow \forall Y: Y$ abg $\Rightarrow \forall Y: Y = \overline{Y}$

daher ist $\mathbb{R}$ einzige dichte Menge in $\mathbb{R}$; aber $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(iii) Als wichtige Bsp der Funktionalanalysis:

ℓ^2 ist separabel, ℓ^∞ ist nicht separabel

[Nicht-separable Hilbert Räume sind unangenehm.]

2.52 Def (Abzählbarkeitsaxiome) $(X, \mathcal{O})$ t.R.

(i) X erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom

(Wir sagen "X ist AA1") $:\Longleftrightarrow \forall x \in X\ \exists$ abzählbare Umgebungsbasis

(ii) X erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom

(Wir sagen "X ist AA2") $:\Longleftrightarrow \mathcal{O}$ hat eine abzählbare Basis

2.53 Bem (Konsequenzen von AA1, AA2)

(i) X AA1, $x \in X \Longrightarrow$ OBdA $\mathcal{W}_x = \{W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots\}$

Umgebungsbasis

denn ersetze gegebenenfalls W_k durch

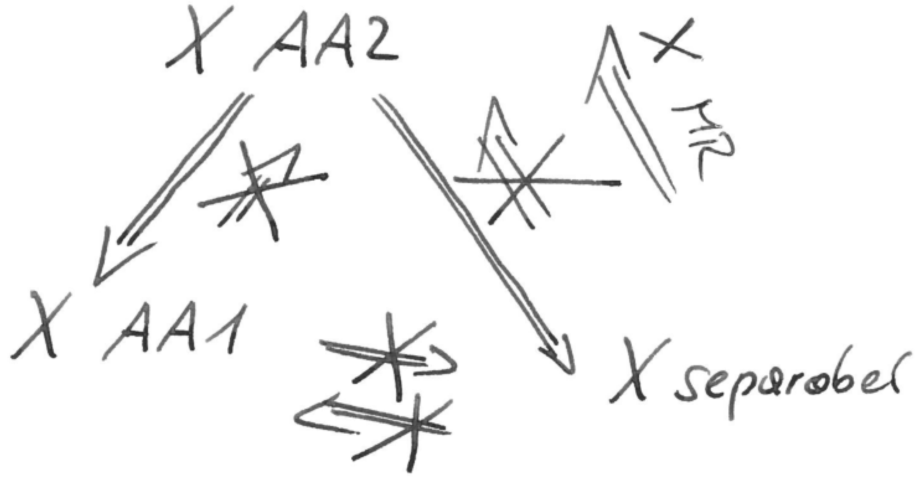
$W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k$

(ii) Jeder tR dessen Top von einer Metrik induziert ist erfüllt AA1; $B_{\frac{1}{n}}(x)$ ist abz. Umgebungsbasis bei x.

(iii) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$ ist AA2 (2.10 (i) bzw UE 16)

Wir klären nun erschöpfend die Beziehgn AA1 – AA2 – separabel

2.54 THM (AA1 vs AA2 vs separabel) $(X, \mathcal{O})$ t.R



Es gilt sogar: separabel $\wedge$ AA1 $\not\Rightarrow$ AA2

Beweis: AA2 $\Rightarrow$ AA1: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ abz. Basis für $\mathcal{O}$.

Sei $\mathcal{W}_x$ U-Basis bei x (z.B. $\mathcal{W}_x = \mathcal{U}_x$ ... U-System).

Sei $W \in \mathcal{W}_x \overset{2.17(i)}{\Longrightarrow} \exists O \in \mathcal{O}: x \in O \subseteq W \overset{2.9(ii)}{\Longrightarrow} \exists B_k : x \in B_k \subseteq O$

wobei $k = k(W)$ von W abhängt.

Nun ist $\{B_k \mid \exists W \in \mathcal{W}_x : k = k(W)\}$ abz. U-Basis bei x.

AA2 $\Rightarrow$ separabel: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, \dots\}$ abz. Basis für $\mathcal{O}$.

Wähle in jedem B_k (OBdA $B_k \neq \emptyset$ $\forall k \in \mathbb{N}$!) ein x_k.

Damit ist $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ abzählbar und dicht, denn jede nicht leere offene Menge enthält ein B_k und somit ein x_k.

<u>X MR (X separabel $\Rightarrow$ X AA2)</u>: Sei (X,d) MR

und $\mathcal{O}$ wie in 2.4(i). Sei $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$ abz & dicht in X.

Wir zeigen $\mathcal{B}:=\{B_{\frac{1}{n}}(y_k) \mid n,k\in\mathbb{N}\}$ ist (abz!) Basis von $\mathcal{O}$.

Wir verwenden 2.9(ii): also ist zz $\forall O\in\mathcal{O}\ \forall x\in O\ \exists B_x\in\mathcal{B}: x\in B_x\subseteq O$

Sei $O\in\mathcal{O}$ $x\in O \Rightarrow \exists\delta>0: B_\delta(x)\subseteq O$ (2.4(i))

Sei $\frac{1}{n}<\frac{\delta}{2} \xRightarrow{Y\text{ dicht}} \exists y_{k_0}\in B_{\frac{1}{n}}(x)$

Sei $y\in B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0}) \Rightarrow d(x,y) \overset{(M3)}{\leq} d(x,y_{k_0})+d(y_{k_0},y)$

$$< \frac{1}{n}+\frac{1}{n} = \frac{2}{n}<\delta$$

$\Rightarrow x\in B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0})\subseteq B_\delta(x)\subseteq O$ mit $B_{\frac{1}{n}}(y_{k_0})\in\mathcal{B}$.

<u>Die Niemytzki-Halbebene H ist separabel und AA1 aber nicht AA2</u>:

(vgl 2.26(iii))

•) $Y:=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Q}, y>0\}$ ist abzählbar und dicht, da jede Menge der U-Basis $B_\varepsilon(p)$ bzw $C_\varepsilon(p)$ enthält Pkte aus Y

•) Die Familien $B_{\frac{1}{n}}(p)$ bzw $C_{\frac{1}{n}}(p)$ bilden abz. U-Basis

•) Ist $\mathcal{B}$ Basis von H, dann muß es zu jedem $p=(a,0)$ $(a\in\mathbb{R})$ ein $B_p\in\mathcal{B}$ geben: $p\in B_p\subseteq C_1(p)$ (2.9(ii))

Da $B_p\cap\{x\text{-Achse}\}=\{p\}$ sind überabzählbar viele B_p nötig.

Dieses Bsp zeigt

$\underline{AA1 \not\Rightarrow AA2}$, $\underline{\text{separabel} \not\Rightarrow AA2}$, $\underline{\text{separabel} + AA1 \not\Rightarrow AA2}$

$\underline{AA1 \not\Rightarrow \text{separabel}}$: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$: $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\{\{x\}\}$ U-Basis bei $x \Rightarrow \underline{AA1}$ aber $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{dis})$ ist nicht separabel (2.51(ii))

$\underline{\text{Separabel} \not\Rightarrow AA1}$: $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{co})$ (vgl. 2.4(v))

•) Jede abz. Teilmenge Y ist dicht, da jede offene Menge (O^c ist endlich) Y-Pkte enthält. $\Rightarrow$ separabel

•) kein Pkt hat eine abz. U-Basis, denn ang schon, d.h. sei $\{W_1, W_2, \dots\}$ abz. U-Basis bei x. Dann definiere

$$A := \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \Rightarrow x \in A$$

$$A^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{W_i^c}_{\text{endl.}} \text{ abzählbar} \Rightarrow A^c \cup \{x\} \neq \mathbb{R}$$

(De Morgan)

$\exists O \in \mathcal{O}: O \subseteq W_i \Rightarrow O^c \supseteq W_i^c$ und O^c endlich

Sei $y \in \mathbb{R} \setminus (A^c \cup \{x\}) \Rightarrow x \neq \underline{y \in A}$ (*)

$\Rightarrow W := \mathbb{R} \setminus \{y\}$ offene Umgebung von x

$\Rightarrow \exists W_e: x \in W_e \subseteq W$

$y \notin W \Rightarrow y \notin W_e \Rightarrow y \notin A$ (lt. Def v. A)

Wid zu (*) $\lightning$

$\square$

2.55 KOR Die Topologie der Niemytzki-HE H kann nicht von einer Metrik stammen.

Beweis: Wäre H metrisch, dann wäre die Kombination separabel aber nicht AA2 unmöglich. $\square$

2.56 BEM (Zur Bedeutung von AA1-2)

(i) Die Bedeutung von AA1-Räumen liegt daran, dass Fragen der Konvergenz mittels Folgen behandelt werden können; also dieselben Techniken wie in MR greifen. [Ist ein Raum nicht AA1, dann „versanden" Folgen mit ihren abz. vielen Pkten bevor sie in die überabzählbar vielen kleinen Umgebungen eines Pktes kommen.] $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{KAP 3}}$

(ii) Die Bedeutung von AA2-Räumen liegt darin, dass diese Eigenschaft für top. Mannigfaltigkeiten (grundlegend für die gesamte moderne Geometrie, Top, Globale Analysis) gefordert wird.

[siehe auch [J, $\underline{\text{VI}}$ §3]]

3 KONVERGENZ

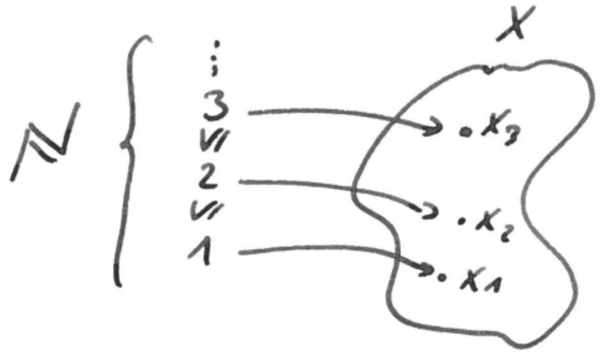
3.1. EINLEITUNG: Zum Studium von Konvergenz in t.R. stellen sich die aus der Analysis und den MR bekannten Folgen als zuwenig flexibel heraus; vgl. auch 2.56(ii). Weder Stetigkeit noch Abschluß können mittels Folgen (in nicht AA1-Räumen) charakterisiert werden...

Aber, alles wird wieder gut, wenn wir die Indexmenge $\mathbb{N}$ bei Folgen zu einer beliebigen gerichteten Menge verallgemeinern und so den Begriff des Netzes erhalten. Damit können die aus MR bekannten Resultate "problemlos" übersetzt werden. Der einzig heikle Punkt ist das Verfeinern eines Netzes, was analog zum Teilfolgenbegriff ist.

Ein wichtiger Unterschied zwischen Grenzwerten von Netzen in t.R. und Grenzwerten von Folgen in MR ist, dass erstere nicht eindeutig sein müssen [vgl. UE für die Eindeutigkeit im 2. Fall]. Top. R. wo Grenzwerte eindeutig sind können durch das Hausdorffsche Trennungsaxiom charakterisiert werden. Dieses und weitere Trennungsaxiome sind Inhalt des §3.2.

§3.1. NETZE, KONVERGENZ

3.2. MOTIVATION: Folgen sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach X.



Wir werden nun die Indexmenge $\mathbb{N}$ – eine geordnete Menge – durch eine spezielle Art von geordneten Mengen ersetzen. Eine beliebige geordnete <u>nicht</u> totalgeordnete Menge ist für unsere Zwecke nicht brauchbar – wir müssen sicherstellen, dass 2 „Zweige" der Ordnung nicht getrennt bleiben.

(es gibt nicht vergleichbare Elemente vgl. 2.6.

3.3 DEF (gerichtete Menge). Sei Λ eine Menge und $\leq$ eine Relation auf Λ (d.h. eine Teilmenge von $\Lambda \times \Lambda$)

(i) $(\Lambda, \leq)$ heißt <u>geordnete Menge</u>, falls $\forall \mu, \nu, \lambda \in \Lambda$ gilt

(R) $\lambda \leq \lambda$ (Reflexivität)

(T) $\lambda \leq \mu \wedge \mu \leq \nu \Rightarrow \lambda \leq \nu$ (Transitivität)

(A) $\lambda \leq \mu \wedge \mu \leq \lambda \Rightarrow \mu = \lambda$ (Antisymmetrie)

(ii) gilt außerdem

(nof) $\forall \lambda, \mu \in \Lambda \; \exists \nu \in \Lambda: \lambda \leq \nu \wedge \mu \leq \nu$ (nach oben filtrierend)

so heißt $(\Lambda, \leq)$ <u>gerichtete Menge</u>.

3.6 BEM (Zur Ordnung der Begriffe)

NICHT VORGETRAGEN

Oft wird (A) <u>nicht</u> in die Definition der gerichteten Menge mit hineingenommen; d.h. in einer derartigen gerichteten Menge kann für verschiedene Elemente λ, μ sowohl $\lambda \leq \mu$ als auch $\mu \leq \lambda$ gelten. Wir wollen das aber <u>nicht tun</u>!

Allgemein können wir die Begriffe wie folgt ordnen

(i) (R) + (T) ... $\leq$ heißt <u>Präordnung</u> (Quasiordnung)

(ii) Eine Präordnung heißt <u>total</u>, wenn $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$ gilt

(tot) $\lambda \leq \mu \vee \mu \leq \lambda$.

(iii) Eine <u>Präordnung</u> heißt <u>Ordnung</u> (partielle Ordnung, Halbordnung) wenn (A) gilt.

(iv) In Präordnungen muß „<" als

(kl) $\lambda < \mu :\Leftrightarrow \lambda \leq \mu \wedge \mu \not\leq \lambda$ definieren und <u>NICHT</u> als

(kl') $\lambda < \mu :\Leftrightarrow \lambda \leq \mu \wedge \lambda \neq \mu$.

Das hätte nämlich für $\lambda \neq \mu$, $\lambda \leq \mu$, $\mu \leq \lambda$ die unangenehme Konsequenz $\lambda < \mu \wedge \mu < \lambda$ – was wir sicher nicht wollen.

In Halbordnungen gilt aber (kl) $\Leftrightarrow$ (kl'); darum wird in der „Einführung in das math. Arbeiten" gefahrlos das anschaulichere (kl') verwendet.

3.5 BSP (gerichtete Mengen)

(i) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung; ebenso $\mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)$ und jede totalgeordnete Menge.

(ii) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{Z} := \{$Zerlegungen von $[a,b]$ $|$ $z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b\}\ \}$

Wir definieren $z_1 \leq z_2 :\Leftrightarrow z_1 \subseteq z_2$. Dann ist $(\mathcal{Z}, \leq)$ gerichtete Menge: (R), (T), (A) sind klar; für $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}$ gilt $z_1 \cup z_2 \in \mathcal{Z}$ und $z_1 \leq z_3 \wedge z_2 \leq z_3$ also gilt (NOF).

(iii) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R. $x \in X$ und $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis bei x (z.B. $\mathcal{V}_x = \mathcal{U}_x$). Wir definieren

$$V_1 \leq V_2 :\Longleftrightarrow V_2 \subseteq V_1 \quad [\text{sic!}]$$

$(\mathcal{V}_x, \leq)$ ist geordnete Menge: (R), (T), (A) sind klar; (NOF) ist gerade (UB2).

12. VO 29.4.

13. VO 3.5

3.6 DEF (Netz) Sei X eine Menge.

Ein <u>Netz in X</u> ist eine Abbildung $x : \Lambda \to X$, wobei Λ eine beliebige gerichtete Menge ist.

Wir schreiben x_λ statt $x(\lambda)$ und bezeichnen das gesamte Netz mit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(x_\lambda)_\Lambda$ oder (x_λ)

3.7 DEF (Limes, HW). Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R., $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in X, $x\in X$,

(i) Wir sagen (x_λ) konvergiert gegen x, $x_\lambda \to x$ bzw x ist <u>ein</u> Grenzwert (GW)/Limes von x_λ, falls } $\mathcal{U}_x$ Umgebungssystem bei x

$$\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists\lambda_0\ \underbrace{\forall\lambda\geq\lambda_0 : x_\lambda\in U}_{(x_\lambda)_\lambda \text{ schließlich in } U}$$

(ii) x heißt <u>Häufungswert</u> (HW) von $(x_\lambda)_\lambda$ $:\Longleftrightarrow \forall U\in\mathcal{U}_x\ \underbrace{\forall\lambda_0\ \exists\lambda\geq\lambda_0 : x_\lambda\in U}_{(x_\lambda)_\lambda \text{ immer wieder in } U}$

3.8 BEOBACHTUNG $x_\lambda\to x \Rightarrow x$ HW von $(x_\lambda)_\lambda$, denn <u>$U\in\mathcal{U}_x$ $\lambda_0\in\Lambda$</u>; $\exists\lambda_1\ \forall\lambda\geq\lambda_1 : x_\lambda\in U$. Sei $\lambda_2\in\Lambda$ so gewählt, dass $\lambda_2\geq\lambda_1$, <u>$\lambda_2\geq\lambda_0$</u> $\Rightarrow x_{\lambda_2}\in U$ [Beachte (nof)!]

3.9 BSP (Netze, Konvergenz)

(i) $\Lambda=\mathbb{N}$ mit der gew. Ordnung (vgl. 3.5(i)). Diese Netze sind genau die Folgen in X; obige Definitionen von Grenzwert und HW reproduzieren genau die Defs in MR, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$.

(ii) $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ abg. Intervall, $\mathcal{Z}$ wie in 3.5(ii)

Für jede beschränkte Fkt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definieren wir über $\mathcal{Z}$ die beiden Netze $(Z=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\})$

$$O(f)_Z := \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k-t_{k-1}) \qquad M_k:=\sup\{f(t)\mid t\in[t_{k-1},t_k]\}$$

$$U(f)_Z := \sum_{k=1}^{n} m_k(t_k-t_{k-1}) \qquad m_k:=\inf\{\text{—}\ \text{"}\ \text{—}\}$$

Die Analysis lehrt, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, falls $O(f)_Z \to \alpha \leftarrow U(f)_Z$ gilt; dieser Grenzwert wird dann bekanntlich mit $\int_a^b f(t)\,dt$ bezeichnet.

(iii) (X,Θ) t.R., $x \in X$ und $\Lambda = \mathcal{V}_x$ wie in 3.5(iii).

Für jedes $V \in \Lambda = \mathcal{V}_x$ wählen wir ein beliebiges $x_V \in V$ und betrachten das Netz $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$. Dann gilt

$$x_V \to x.$$

Denn sei $\underline{U \in \mathcal{U}_x} \overset{2.23}{\Longrightarrow} \underline{\exists V_0 \in \mathcal{V}_x}: V_0 \subseteq U$; sei $\underline{V \geq V_0}$ (d.h. $V_0 \supseteq V$!) $\Rightarrow \underline{x_V} \in V \subseteq V_0 \subseteq \underline{U}$.

Dieses Netz $(x_V)_{V\in\mathcal{V}_x}$ ersetzt gewissermaßen eine Folge $(x_n)_n$ in einem MR mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$.

3.10 SATZ (Abschluß via Netze)

Sei (X,Θ) t.R., $A \subseteq X$, $x \in X$. Dann gilt

(i) A abg $\iff \forall$ Netze $(x_\lambda)_\lambda$ in A mit $x_\lambda \to x \Rightarrow x \in A$

(ii) $\overline{A} := \{x \in X \mid \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } A: x_\lambda \to x\}$

Beweis (wörtlich wie in $\mathbb{R}^{(n)}$, MR)

(i) $(\Rightarrow)$ Sei $x_\lambda \in A\ \forall \lambda \in \Lambda$, $x_\lambda \to x$. Indirekt angenommen $x \notin A \Rightarrow$ A^c offene Umgebung von x $\wedge$ $\nexists x_\lambda \in A^c$ $\lightning$ zur Konvergenz

(⇐) Indir ang. A nicht abg. $\overset{2.40(v)}{\Longrightarrow} \exists x \in \bar{A} \setminus A$

Sei $\mathcal{U}_x$ U-Basis von x $\overset{2.36(iv)}{\Longrightarrow} \forall V \in \mathcal{U}_x \; \exists x_V \in A \cap V$. (insbes $x_V \in A$)

Konstruiere Netz $(x_V)_V$ wie in 3.9(iii) $\Rightarrow x_V \to x$

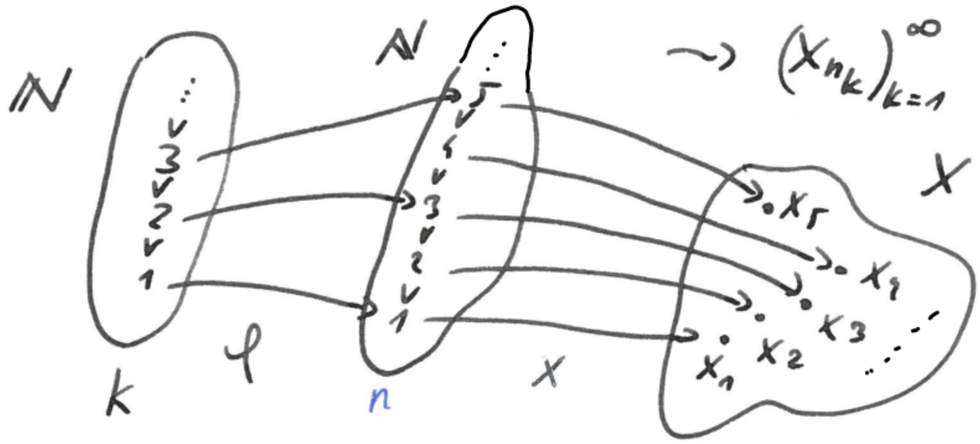
$\Rightarrow x \in A$ lt. Voraus $\lightning$ zu $x \notin A$

(ii) [ÜE] $\square$

3.11. MOTIVATION (Teilfolge; Verfeinerung eines Netzes)

Dem Begriff einer Teilfolge entspricht der Begriff der Verfeinerung eines Netzes; betrachten wir zunächst ersteren

$(x_n)_{n=1}^\infty$ Folge; Teilfolge $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ ($n_1 < n_2 < \dots$)



Hier wird offenbar die Teilfolge $x_1, x_3, x_5, \dots$ dargestellt

$$1 \longmapsto n_1 = 1 \longmapsto x_{n_1} = x_1 =: y_1$$
$$2 \longmapsto n_2 = 3 \longmapsto x_{n_2} = x_3 =: y_2$$
$$3 \longmapsto n_3 = 5 \longmapsto x_{n_3} = x_5 =: y_3$$

Somit entsteht die Folge $(y_k)_{k=1}^\infty$ als Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^\infty$ mittels $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ($\varphi(k) = n_k$) durch

$$\boxed{y_k = x_{n_k} = x \circ \varphi(k)}$$

Wesentlich dabei ist, dass φ <u>monoton</u> ist ($n_{k+1} \geq n_k$) und dass die Werte von φ <u>über jede Schranke wachsen</u>. Daher...

<u>3.12 DEF</u> (Verfeinerung) Sei Λ eine gerichtete Menge und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Sei K eine weitere gerichtete Menge und $\varphi: K \to \Lambda$ eine Abb mit den Eig (i) <u>monoton</u> [d.h. $\kappa_1 \leq \kappa_2 \Rightarrow \varphi(\kappa_1) \leq \varphi(\kappa_2)$]

(ii) $\forall \lambda\in\Lambda\ \exists \kappa\in K: \varphi(\kappa) \geq \lambda$.

Dann bezeichnen wir das Netz $(y_\kappa)_{\kappa\in K}$ mit

$$y_\kappa := x_{\varphi(\kappa)}$$

als eine <u>Verfeinerung</u> des Netzes $(x_\lambda)_\Lambda$.

<u>3.13 BEM</u> (zu Verfeinerungen)

(i) <u>ACHTUNG</u>: Eine Verfeinerung $(y_\kappa)_K$ eines Netzes kann "viel mehr" Glieder haben als das Ursprüngliche Netz $(x_\lambda)_\Lambda$ in dem Sinn, dass K viel größer sein kann als Λ obwohl natürlich $\varphi(K) \subseteq \Lambda$, d.h. $\{y_\kappa \mid \kappa\in K\} \subseteq \{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ gilt. [φ ist monoton aber nicht streng monoton.] Insbesondere muss die Verfeinerung einer Folge keine Folge mehr zu sein!

z.B. sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$; $K:=[1,\infty)$ (überabzählbar!)
und $y_t := x_{\lfloor t\rfloor}$ $t\in K$, $\lfloor\ \rfloor$ nächstkleinere ganze Zahl. 13.Vo 3.5
Dann ist $(y_t)_{t\in K}$ Verfeinerung von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber keine Folge.

(ii) Eine Verfeinerung einer Verfeinerung ist wieder eine Verfeinerung

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[rrr, bend right, "z"'] & K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "y"'] & \Lambda \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$

14.Vo 5.5.

Erfüllen nämlich φ, ψ (i), (ii) in 3.12, dann auch $\psi\circ\varphi$.

3.14 Prop (Eigenschaften von Verfeinerungen)

Sei $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in $(X,\mathcal{O})$ und $(y_\kappa)_\kappa = (x_{\varphi(\kappa)})_\kappa$ eine Verfeinerung von $(x_\lambda)_\lambda$. Dann gilt

(i) Konvergiert $(x_\lambda)_\lambda$ gegen x, dann auch $(y_\kappa)_\kappa$.

(ii) Ist $x\in X$ HW von $(y_\kappa)_\kappa$ ist, dann auch von $(x_\lambda)_\lambda$ [sic!]

Beweis: (i) Sei $U\in\mathcal{U}_x \overset{3.7(i)}{\Longrightarrow} \exists\lambda_0\ \forall\lambda\geq\lambda_0: x_\lambda\in U$; wähle κ_0 mit $\varphi(\kappa_0)\geq\lambda_0$ (möglich wegen 3.12(ii)); für $\kappa\geq\kappa_0$ gilt:
$\varphi(\kappa)\geq\varphi(\kappa_0)\geq\lambda_0 \Longrightarrow y_\kappa = x_{\varphi(\kappa)} \in U$.

(ii) Sei $U\in\mathcal{U}_x$, $\lambda_0\in\Lambda$; wähle κ_0 mit $\varphi(\kappa_0)\geq\lambda_0$
$\overset{3.7(ii)}{\Longrightarrow} \exists\,\kappa\geq\kappa_0$ mit $y_\kappa\in U$. Setze $\lambda:=\varphi(\kappa) \Longrightarrow$
$\lambda=\varphi(\kappa)\geq\varphi(\kappa_0)\geq\lambda_0$ und daher $x_\lambda = x_{\varphi(\kappa)} = y_\kappa\in U$. $\square$

3.15 SATZ (Char. von HW) $(X,\mathcal{O})$ t.R., $x \in X$

x ist HW von $(x_\lambda)_\lambda \iff \exists$ Verfeinerung $(y_\kappa)_\kappa \to x$

Beweis $(\Leftarrow)$ $y_\kappa \to x \overset{3.8.}{\Longrightarrow} x$ HW von $(y_\kappa)_\kappa \overset{3.14}{\Longrightarrow} x$ HW von $(x_\lambda)_\lambda$

$(\Rightarrow)$ Sei $\mathcal{V}_x$ U-Basis von x. Wir setzen

$$K := \{(\lambda, V) \mid \lambda \in \Lambda,\ V \in \mathcal{V}_x,\ x_\lambda \in V\}$$

[x HW $\Rightarrow$ jedes $V \in \mathcal{V}_x$ kommt in mind. einem Element von K vor]

•) <u>K ist gerichtete Menge</u> mit $(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2) :\iff \lambda_1 \leq \lambda_2 \wedge V_1 \supseteq V_2$

(R), (T), (A) sind klar; wir zeigen (nof): $(\lambda_1, V_1), (\lambda_2, V_2) \in K$

(nof) für $\Lambda \Rightarrow \exists \lambda_3: \lambda_3 \geq \lambda_1 \wedge \lambda_3 \geq \lambda_2$; (U2) $\Rightarrow \exists V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$

$\Rightarrow (\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_3, V_3) \wedge (\lambda_2, V_2) \leq (\lambda_3, V_3)$

•) <u>$y_{(\lambda,V)} := x_\lambda$</u> (d.h. $\varphi: K \to \Lambda$; $\varphi(\lambda, V) = \lambda$) ist <u>gegen x konvergente Verfeinerung.</u>

$y_{(\lambda,V)}$ pickt jene x_λ heraus, die nahe an x sind..

<u>Sei $U \in \mathcal{U}_x$</u>; <u>wähle $V_0 \in \mathcal{V}_x$</u>: $V_0 \subseteq U$ (2.23). Sei $\lambda_1 \in \Lambda$ bel.

x HW $\Rightarrow$ <u>$\exists \lambda_0 \in \Lambda$</u>: $\lambda_0 \geq \lambda_1$, $x_{\lambda_0} \in V_0$

$\Rightarrow$ <u>$(\lambda_0, V_0) \in K$</u>. Für $(\lambda, V) \geq (\lambda_0, V_0)$ gilt dann

$y_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V \subseteq V_0 \subseteq U$. $\square$

3.16 BEM (Filter)

(i) Es gibt eine Umformulierung des top. Konvergenzbegriffs, der statt Netzen sog. Filter verwendet; dieser ist ebenso anschaulich wie der Netz-begriff schließt aber nicht unmittelbar an den Folgen-begriff an und wird daher außerhalb der Top selten verwendet.

NICHT VORGETRAGEN

[(ii) In manchen Teilen der Mathematik werden Konvergenzbegriffe verwendet, die nicht durch top. R. beschrieben werden können... [CR] 4.2(6).]

---

§ 3.2. EINDEUTIGKEIT DES GRENZWERTS, TRENNUNGSAXIOME

3.17 NOTATION (Grenzwerte eind. bestimmt) $(X, \mathcal{O})$ t.R.

Folgt aus $x_\lambda \to x$ und $x_\lambda \to y$ stets $x = y$, so sagen wir: In $(X, \mathcal{O})$ sind die Grenzwerte eind. bestimmt.

3.18 BSP ((nicht) eindeutige Grenzwerte)

(i) In MR sind die Grenzwerte eind. bestimmt [UE, Aufgabe 7]; daher auch in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$.

(ii) In der Klumpentopologie konvergiert jedes Netz gegen jeden Grenzwert; denn sei $(x_\lambda)_\lambda$, x beliebig. $U\in\mathcal{U}_x \Rightarrow U=X \Rightarrow \forall\lambda\in\Lambda: x_\lambda\in U=X \Rightarrow x_\lambda\to x$.

(iii) $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie.

- $(x_n)_n=(1,2,3,\dots)$ konvergiert gegen jedes $x\in\mathbb{N}$
  denn sei $x\in\mathbb{N}$, $U\in\mathcal{U}_x \overset{2.18}{\Longrightarrow} \exists V$ offen: $x\in V\subseteq U$
  $V=\mathbb{N}\setminus\{x_1,\dots x_k\}$. Sei $N=\max\{x_1,\dots,x_k\}+1$; $n\geq N$
  $\Rightarrow x_n=n\in\mathbb{N}\setminus\{x_1,\dots,x_k\} \Rightarrow x_n\in V\subseteq U$
- $(x_n)_n=(*\dots*,k,k,k,\dots)$; d.h. $(x_n)_n$ ist schließlich konstant und gleich k
  egal
  klar
  $(x_n)_n\to k$ und k ist einziger Grenzwert von $(x_n)_n$
  da $(x_n)_n$ jedes $\mathbb{N}\setminus\{k\}$ verlässt und diese Menge ist offene Umgebung von jedem $\ell\neq k$.

3.19 <u>SATZ+DEF</u> (Eind. Grenzwerte und T_2)

In einem TR $(X,\mathcal{O})$ sind die Grenzwerte genau dann eindeutig bestimmt, wenn das folgende sog. <u>Trennungsaxiom T_2</u> erfüllt ist.

(T_2) $\forall x,y\in X, x\neq y\ \exists U\in\mathcal{U}_x$ und $V\in\mathcal{U}_y: U\cap V=\emptyset$

[graphisch: 

]

In diesem Fall heißt $(X,\mathcal{O})$ <u>Hausdorff-Raum</u>.

Beweis: $(\Rightarrow)$ Indir-ang (T2) gilt nicht, d.h.

$\exists x, y \in X,\ x \neq y$ aber $\forall U \in \mathcal{U}_x\ \forall V \in \mathcal{U}_y : U \cap V \neq \emptyset$

Seien $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y$ U-Basen von x resp. y. Wir definieren

$\Lambda := \{(U,V) \mid U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$, $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2 \wedge V_1 \supseteq V_2$

Dann ist Λ gerichtete Menge bzgl $\leq$.

Für $(U,V) \in \Lambda$ wähle $z \in U \cap V$ ($\neq \emptyset$!) und definiere

$x_{(U,V)} = z$

[vgl. 3.9(iii)]

Dann gilt $x_{(U,V)} \to x$ und $x_{(U,V)} \to y$ $\not\uparrow$ $\lightning$ zur Voraus. dass in $(X, \mathcal{O})$ die Grenzwerte eindeutig sind.

14.VO

5.5

15.VO

11.5.

$(\Leftarrow)$ $x_\lambda \to x,\ x_\lambda \to y$ und ang $x \neq y$

$\overset{(T2)}{\Longrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y : U \cap V = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lambda_1 : \forall \lambda \geq \lambda_1\ \ x_\lambda \in U \\ \exists \lambda_2 : \forall \lambda \geq \lambda_2\ \ x_\lambda \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mit } \lambda_3 := \max(\lambda_1, \lambda_2) \text{ gilt } \forall \lambda \geq \lambda_3 : x_\lambda \in U \cap V \ \lightning$$

$\square$

3.20 BEM (Hausdorff-Räume)

(i) Jeder MR ist Hausdorff [UE, Aufgabe 7 + Satz 3.18]
oder direkt für $x \neq y$: $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset\ \forall \varepsilon < \frac{d(x,y)}{2}$

(ii) Wegen 2.19. können die Umgebungen in (T2) auch durch beliebige offene Mengen ersetzt werden, die x bzw. y enthalten.

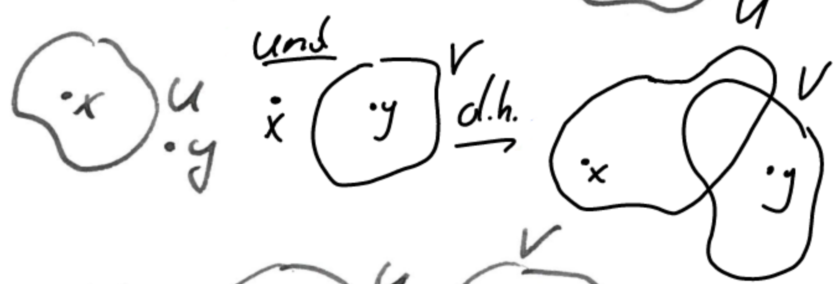
(iii) In nicht (T2)-Räumen sollte die Schreibweise $\lim\limits_\lambda x_\lambda = x$ mit Vorsicht genossen werden. [aus elementarer Logik folgt aus $\lim x_\lambda = x \wedge \lim x_\lambda = y$, dass $x = y$!]

3.21 DEF (Liste der Trennungsaxiome – Auswahl)

Sei $(X, \mathcal{O})$ top. Raum, $x, y \in X$, $A, B \subseteq X$ abg. $U, V \subseteq X$ offen

(T_0) $\forall x \neq y$ $\exists U: x \in U \not\ni y$ oder $\exists V: y \in V \not\ni x$

(T_1) $\forall x \neq y$ $\exists U: x \in U \not\ni y$ und $\exists V: y \in V \not\ni x$



(T_2) $\forall x \neq y$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V$

(T_3) $\forall x$ $\forall A \not\ni x$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset$ $x \in U, A \subseteq V$

(T_4) $\forall A, B$ $A \cap B = \emptyset$ $\exists U, V: U \cap V = \emptyset$ $A \subseteq U, B \subseteq V$

3.22. BEM (Fakten zu den Trennungsaxiomen)

(i) Es gilt: $T_4 \overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_3 \overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_2 \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_1 \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_0$

(ii) $(T_1) \Leftrightarrow$ alle einpunktigen Mengen sind abgeschlossen.
[Beweis: UE!]. Damit ergibt sich

$$\underbrace{T_4+T_1}_{\text{normal}} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \underbrace{T_3+T_1}_{\text{regulär}} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_2 \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_1 \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} T_0$$

(iii) $(T_3) \Leftrightarrow \forall x \in U \in \mathcal{O}\ \exists V \in \mathcal{O}: x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

(iv) $(T_4) \Leftrightarrow \forall A\,(\text{abg}) \subseteq U \in \mathcal{O}\ \exists V \in \mathcal{O}: A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

(v) Es gibt auch $T_{3\frac{1}{2}}$, T_5, ...

(vi) Jeder MR ist normal (Kap. 8)
Jeder kp. T_2-Raum ist normal (Kap. 6)
In normalen Räumen gelten wichtige Sätze über stetige Funktionen (Kap. 4,5)

3.23 BSP (Trennungsaxiome)

(i) $(X, \mathcal{O}_{kl})$ mit $|X| \geq 2$ erfüllt nicht T_0, T_1, T_2, regulär, normal aber T_3, T_4 (es gibt keine nichttrivialen Mengen wie gefordert)

(ii) $(X, \mathcal{O}_{co})$, $|X| = \infty$ erfüllt T_1 $[U = X \setminus \{y\},\ V = X \setminus \{x\}]$
aber nicht T_2 $[U \cap V = \text{unendlich, da } (U \cap V)^c = U^c \cup V^c \text{ endlich}]$

(iii) Die Niemytzki-Halbebene ist regulär aber nicht normal. [O.B.]

(iv) Variante von Niemytzki mit U-Basis

für $(p,0)$ ist T_2 aber nicht T_3 $[A = \mathbb{Q} \times \{0\}$ nicht von $p = (\sqrt{2}, 0)$ trennbar.$]$

$\boxed{4}$ STETIGKEIT

4.1. EINLEITUNG. Wir haben in Kap. $\boxed{0}$ Stetigkeit als einen der Schlüsselbegriffe der Topologie bezeichnet. Tatsächlich sind stetige Abbildungen zw. top. Räumen genau die der Struktur (der offenen Mengen) angepassten Abbildungen — analog den linearen Abb. zu Vektorräumen; sie transportieren/respektieren offene Mengen in der „richtigen" Art & Weise.

In Kap $\boxed{1}$ haben wir stetige Abb zw. MR studiert und mittels offener Mengen bzw Umgebungen die Stetigkeit charakterisiert — dies wird unsere Ausgangsdefinition sein.

Spezielles Augenmerk legen wir auf stetige bijektive Abb. mit stetiger Umkehrabbildung; ähnlich den lin. Isomorphismen im Falle der Vektorräume sind es diese Abb. — die sog. Homöomorphismen — die topologische Ununterscheidbarkeit top. R. vermittelt.

Top. Räume, die homöomorph sind sind vom Standpunkt der Topologie „gleich" – wie isomorphe VR.

Homöomorphismen sind also Abb, die die top. Struktur vollständig erhalten.

Schließlich besprechen wir das Problem der Konstruktion stetiger Abb [mit bestimmten Eigenschaften] auf top. Räumen – insbesondere beweisen wir das Lemma von Urysohn.

11.5. ↓ 13.5. ↓

§4.1. STETIGE ABBILDUNGEN

4.2. DEF (Stetige Abb.) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ t.R. und $f: X \to Y$ eine Abb.

$$f \text{ heißt } \underline{\text{stetig}} \;:\Leftrightarrow\; \forall O \in \mathcal{O}_Y : f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$$

[d.h. Urbilder offener Mengen sind offen]

4.3. BEM (stetige Abb.)

(i) Die identische Funktion $id_X : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O})$; $x \mapsto x$ ist stetig, denn sei $O \in \mathcal{O} \Rightarrow id^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}$.

(ii) Konstante Abb $f_c : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$; $x \mapsto c \;\forall x$ sind stetig, denn

$$f_c^{-1}(O) = \begin{Bmatrix} \emptyset & c \notin O \\ X & c \in O \end{Bmatrix} \in \mathcal{O}_X$$

(iii) f ist schon stetig, falls $f^{-1}(G)$ für jede Menge G einer [jeder] Basis oder Subbasis offen ist; denn z.B. für Subbasis: Sei $O \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow$

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}\Big) \underset{[\text{UE}, 1]}{=} \bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{f^{-1}(S_{ij})}_{\text{offen}} \text{ offen wegen (O1), (O2).}$$

(iv) Aus der Def. ist ersichtlich, dass sich f umso leichter [schwerer] tut stetig zu sein je feiner [gröber] $\mathcal{O}_X$ und je gröber [feiner] $\mathcal{O}_Y$ ist.

Neben (iii) gibt es weitere Charakterisierungen für Stetigkeit:

4.4 SATZ (Umformulierungen für Stetigkeit) Sei $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abb. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent

(i) f ist stetig

(ii) $\forall x \in X : U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$ [Urbilder von Umg. sind Umg.]

(iii) $\forall A$ abg in $Y \Rightarrow f^{-1}(A)$ abg in X [Urbilder abg. Menge sind abg.]

Beweis [UE]

4.5 BEM (Stetig in einem Punkt). Wir nennen f stetig in $x \in X$, falls (ii) aus 4.4 in x gilt. Damit ergibt sich wie üblich in $\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$,

$$f \text{ stetig (auf } X) \Longleftrightarrow f \text{ stetig in } x \ \forall x \in X$$

Stetigkeit in einem Punkt kann wie in $\mathbb{R}$ mittels Konvergenz charakterisiert werden

<u>4.6. SATZ</u> (Stetigkeit via Netze) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig in $x \in X$ falls

$$\forall \text{ Netze } (x_\lambda)_\lambda \text{ mit } x_\lambda \to x \implies f(x_\lambda) \to f(x).$$

<u>Beweis</u> [wörtlich wie in $\mathbb{R}$ – vgl. UE 8]

□

<u>4.7 SATZ</u> (Operationen f. stetige Fkt)

(i) $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z)$ beide stetig

$\implies g \circ f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig.

(ii) $f, g : (X, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}\ [\mathbb{C}]$ stetig $\implies$

$f \pm g,\ f \cdot g,\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\}$ stetig

Ist $g(x) \neq 0\ \forall x \implies f/g$ stetig.

<u>Beweis</u> (i) $O \in \mathcal{O}_Z \implies (g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(O)}_{\in \mathcal{O}_Y}) \in \mathcal{O}_X$

(ii) ohne Beweis.

□

Wir kommen nun zu den angekündigten „Isomorphismen" der Topologie.

4.8 DEF (Homöomorphismen) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ t.R; $f: X \to Y$ heißt Homöomorphismus zwischen X und Y falls

f stetig, bijektiv und f^{-1} stetig

ist. In diesem Fall heißen X und Y homöomorph; wir schreiben $X \cong Y$.

4.9 WARNUNG: $(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig und bij $\not\Rightarrow$ f^{-1} stetig

[auf die Stetigkeit der Umkehrabbildung kann in 4.8. also nicht verzichtet werden]. Ein Gegenbsp ist:

$X = Y$, $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{dis}$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{KE}$, $f(x) = x$ $\forall x$ [also $f = id_X$]

Dann ist f offensichtlich bij und stetig: $f^{-1}(G) = G$ offen $\forall G \subseteq X$

aber $f^{-1} = g: (X,\mathcal{O}_{KE}) \to (X,\mathcal{O}_{dis})$ nicht stetig, denn

$\forall G \subseteq X$ $G \neq \emptyset$, $G \neq X \Rightarrow$ $g^{-1}(G) = G$ nicht offen.

4.10 BEM (Homöos als Isos der Top) $f: X \to Y$ Homöo

(i) Es gilt offensichtlich $O \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow$ $f(O) \subseteq Y$ offen

und somit auch

$A \subseteq X$ abg $\Leftrightarrow$ $f(A) \subseteq Y$ abg

$\mathcal{B}$ Basis in X $\Leftrightarrow$ $f(\mathcal{B})$ Basis in Y

und dito für $\mathcal{U}_x$, $\mathcal{V}_x$, ...

$(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ sind daher vom Standpunkt der Topologie aus ununterscheidbar — die top. Struktur ist identisch.

(ii) Allgemein sieht man zwei Realisierungen einer mathematischen Struktur als nicht wesentlich verschieden an, falls es eine umkehrbar eindeutige (=bij) Abbildung zwischen ihnen gibt, die die Struktur erhält; in verschiedenen „Welten" sind dies etwa

Lin. Algebra:	Isomorphismen von VR
Gruppenth.:	Gruppenisomorphismen
Topologie:	Homöomorphismen
Differentialgeo:	Diffeomorphismen ($\mathcal{C}^\infty$, bij mit $\mathcal{C}^\infty$-Inverse)

<u>4.11. Bem</u> (Homöomorphie als Äquivalenzrelation)

Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} und mit f, g auch $f \circ g$ Homöo. Ebenso ist $id_X : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Homöo. Daher definiert Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller top. Räume.

16.VO
13.5

<u>4.12 Bem</u> (Topologische Eigenschaften)

18.5.
17.VO

Wir nennen eine Eigenschaft topolog. Räume <u>topologisch</u> falls sie mit $(X, \mathcal{O})$ auch jeder zu $(X, \mathcal{O})$ homöomorphe Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ besitzt. Bsp.

top. Eig. sind

- AA1|2
- Separabilität
- Metrisierbarkeit (d.h. $\mathcal{O}$ stammt von einer Metrik im Sinne von 2.4)
- Kompaktheit (Kap 6)
- Zusammenhang (Kap 7)

Zum Beweis transportieren wir einfach die relevanten Objekte (offene Mengen, Basen, abz. dichte TM, etc...) mittels des Homöo von X nach Y.

Nicht-Topologische Eigenschaften sind etwa solche, die spezielle Eig. der die Top definierenden Metrik verwenden wie z.B.

- Beschränktheit (als MR)
- Vollständigkeit (als MR) [d.h. jede CF konvergiert]

Bsp: $f: [0,\infty) \to [0,1)$ homöo

$x \mapsto \frac{x}{1+x}$

vollst. MR mit unbeschr. Metrik

nicht vollst. $d(x,y) \leq 1 \ \forall x,y$

[$f' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = 1/(1+x)^2 > 0 \Rightarrow$ str. mon $\Rightarrow$ bij

f stetig & $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ stetig auf $[0,1)$

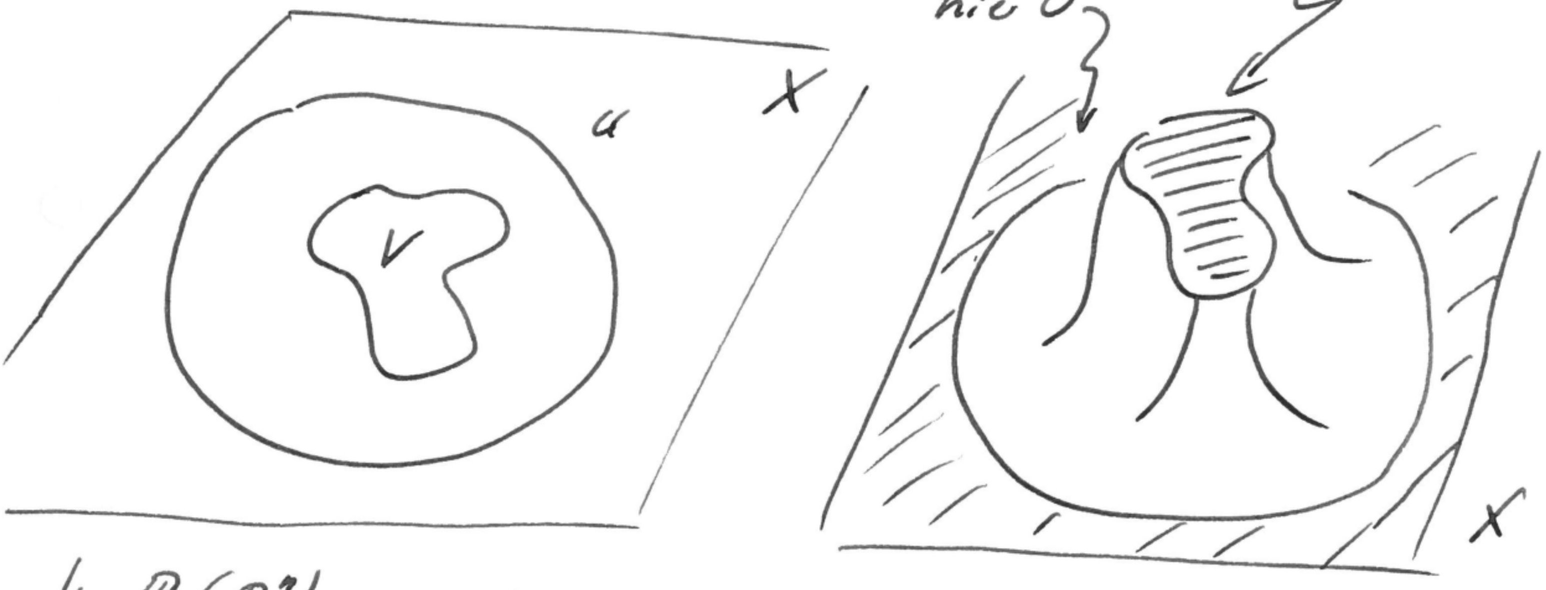
$\Longrightarrow f$ Homöo]

§ 4.2 Konstruktion stetiger Funktionen auf top. Räumen

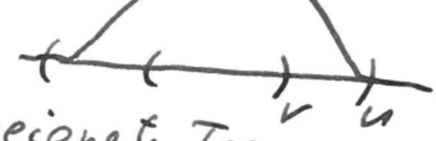
4.13 Bem (Grundaufgabe der Funktionenkonstr. auf top. Räumen)

Wenn wir auf $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) oder einem Teilraum stetige Fkt konstruieren wollen, so stellt uns die Analysis eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Verfügung; z.B. Polynome, rat. Fkt, elementare Fkt (sin, cos, e, log, ...), Potenzreihen, ...

Auf allg. top. Räumen ist die Situation schon viel schwieriger. Stellen wir uns vor, wir haben $V \subseteq U \subseteq X$ im t.R. $(X, \mathcal{O})$ gegeben und wollen eine Funktion finden $f: X \to [0,1]$ stetig, sodass $f \equiv 1$ auf V, $f \equiv 0$ auf $X \setminus U$.



In $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) wäre das ja kein Problem...



Dass diese Grundaufgabe der Funkt.-konstruktion auf t. R. lösbar ist, falls geeignete Trennungseig. gegeben sind sagt der folgende Satz.

4.14. SATZ (Lemma von Urysohn) $(X,\mathcal{O})$ t.R

X T_4 $\Rightarrow$ $\forall A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$

$\exists f: X \to [0,1]$ stetig mit $f|_A = 1$, $f|_B = 0$

[d.h. die Grundaufgabe aus 4.13 ist lösbar

$A = V$, $B = X \setminus U$]

4.15 BEM (Umkehrung) Die Umkehrung gilt ebenfalls und ist einfach zu sehen, denn sei f wie oben, dann trennen $U := \{x \mid f(x) > 1/2\}$ und $V = \{x \mid f(x) < 1/2\}$ A und B offen $\Rightarrow T_4$.

[Offenheit von U, V benötigt
eigentlich eben Begriff der Spurtop auf $[0,1]$; vgl. 5.2]

4.16. Beweisidee: Konstruieren f als limes von Treppenfkt.

Eine solche anzugeben bedeutet aber genau eine „Kette" von Mengen zwischen A und B anzugeben, d.h.

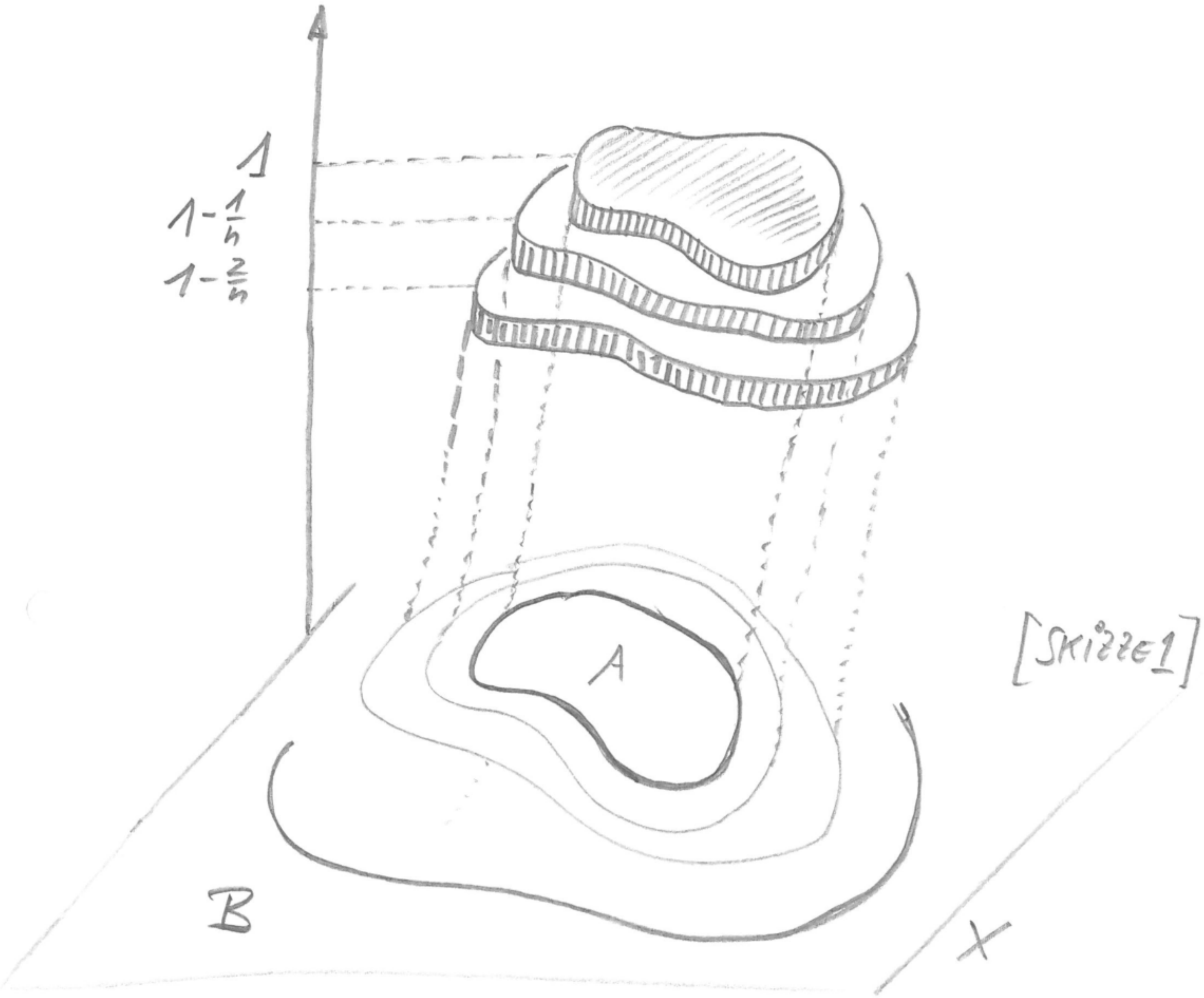
$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq X \setminus B$$

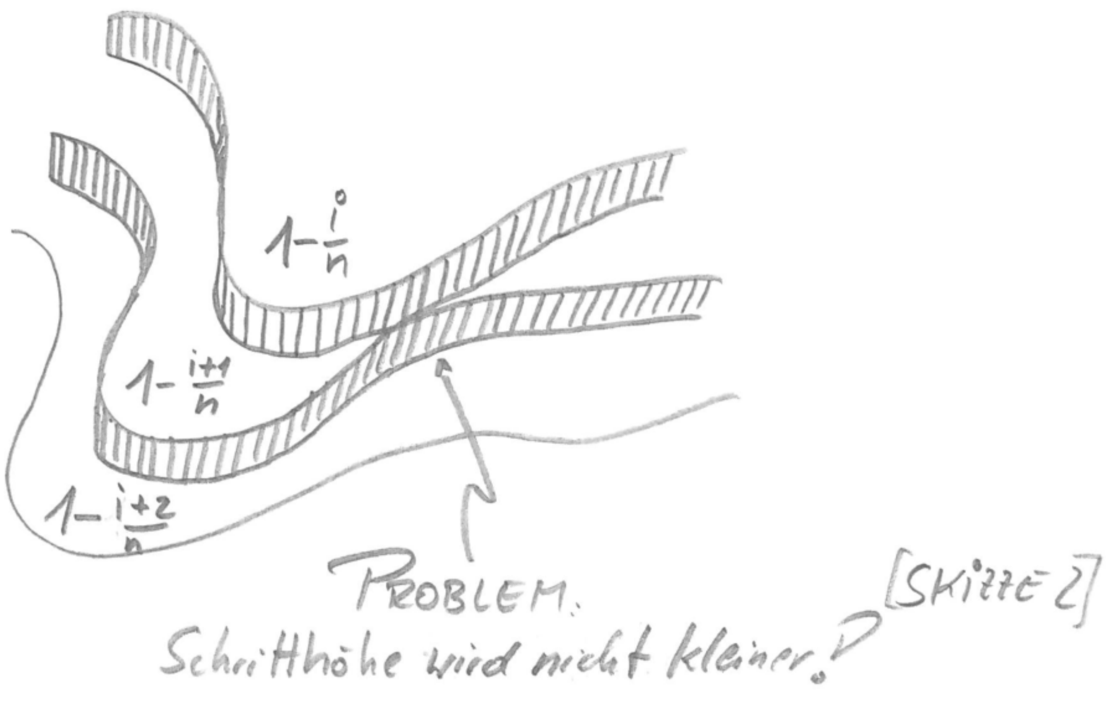
und f wie folgt zu definieren: $f|_{A_0} = 1$, $f|_{A_1 \setminus A_0} = 1 - \frac{1}{n}$, $f|_{A_2 \setminus A_1} = 1 - \frac{2}{n}$, ...

... $f|_{A_n \setminus A_{n-1}} = 0$ [siehe Skizze 1].

Um die Sprünge kleiner zu machen müssen wir die „Kette" verfeinern, d.h. weitere Zwischenstufen einziehen.
Wenn dieses Verfahren Erfolg haben soll, dann darf eines nicht passieren: dass der Rand von A_{i-1} den Rand von A_i erreicht [siehe Skizze 2].

Wir brauchen also $\boxed{\overline{A_{i-1}} \subseteq A_i^{\circ} \ \forall i.}$


1
1 - 1/n
1 - 2/n
A
B
X
[SKIZZE 1]


1 - i/n
1 - (i+1)/n
1 - (i+2)/n
PROBLEM:
Schritthöhe wird nicht kleiner!
[SKIZZE 2]

Wenn wir das induktiv beweisen wollen, so ist der Induktionsanfang kein Problem: $A = A_0 \subseteq A_1 := X \setminus B$.
$\nearrow$ abg $\nearrow$ offen

Den Induktionsschritt liefert aber umgenau T_4 mittels Bem 3.22 (iv) [Beweis UE]
$[\forall A$ abg $A \subseteq U$ offen $\exists V$ offen: $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U]$.

Der Beweis ist nun nur noch eine konsequente Ausformulierung dieser Idee [UE, [J] $\underline{\text{VIII}}$, §2].

4.17 <u>KOROLLAR</u> (Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn) Sei $(X, \mathcal{O})$ t.R, T_4, $A \subseteq X$ abg und $f: A \to [-\infty, +\infty]$ stetig.
Dann existiert eine stetige Funktion $F: X \to [-\infty, +\infty]$, die f fortsetzt, d.h. $F|_A = f$.

<u>4.18 BEM</u> (Tietze Urysohn)

(i) Die Aussage $f: A \to [-\infty, +\infty]$ stetig haben wir eigentlich noch garnicht definiert, da wir Topologien auf Teilmengen nicht definiert haben; das erfolgt erst in §5.1. Daher beweisen wir 4.17 [hier] nicht.
[Bew in [J] VIII §3]

(ii) 4.17 bleibt mit Zielraum $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ gültig
[J, VIII §3].

(iii) Der nächste Schritt in der Konstruktion stetiger Funktionen wäre die Konstruktion von sog. <u>Zerlegungen der Eins</u>; diese spielen v.a. in der Differentialgeometrie eine große Rolle [3, VIII §4] und benötigen (analog zu T_4 in 4.14, 4.17) die top. Eigenschaft <u>parakompakt</u>.

17.VO 18.5.

5 SPURTOPOLOGIE, INITIALE & FINALE TOPOLOGIE

18.V0 – 27.5.

5.1. EINLEITUNG: Grundsätzlich widmen wir uns in diesem Kap. der Aufgabe aus bereits vorhandenen Topologien neue Topologien zu erzeugen.
Zunächst "topologisieren" wir so Teilmengen eines top. Raumes und gelangen zur Spurtopologie bzw Teilraumtop. Desweiteren besprechen wir den Transport von Topologien entlang von Abbildungen – und zwar entlang (finale Top.) und gegen (initiale Top) die Abbildungsrichtung. Die Spurtopologie wird schließlich als (Spezialfall einer) initialen Top. entlarvt.

§5.1. DIE SPURTOPOLOGIE

5.2 DEF (Spur-/Teilraumtopologie) $(X,\mathcal{O})$ t.R. $Y\subseteq X$
Wir definieren die Spurtopologie $\mathcal{O}|_Y$ auf Y durch

$$\mathcal{O}|_Y := \mathcal{O}\cap Y := \{O\cap Y \mid O\in\mathcal{O}\}$$

und nennen diese auch von $\mathcal{O}$ auf Y induzierte Top oder Teilraumtop. auf Y. [Die offenen Mengen in $\mathcal{O}|_Y$ sind also die offenen Mengen in X geschnitten mit Y.]

5.3 BEM (Spurtop ist Top!) $\Theta/_Y$ erfüllt tatsächlich (O1) – (O3), denn

(O1) $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$

(O2) $\bigcup_i (O_i \cap Y) = \underbrace{(\bigcup_i O_i)}_{\in \Theta} \cap Y$ (O3) $\bigcap_{i=1}^n (O_i \cap Y) = \underbrace{(\bigcap_{i=1}^n O_i)}_{\in \Theta} \cap Y$.

5.4 PROP (Eigenschaften der Spurtop.) (X, Θ) t.R, $(Y, \Theta/_Y)$ Teilraumtop

Dann gilt

(i) $U \in \mathcal{U}_x^Y \iff \exists W \in \mathcal{U}_x : U = W \cap Y$

U-System in $\Theta|_Y$

(ii) A abg bez. $\Theta/_Y \iff \exists B$ abg bez. Θ : $A = B \cap Y$

(iii) $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y \quad \forall A \subseteq Y$

Abschluß in $\Theta|_Y$

(iv) $(x_\lambda)_\lambda$ Netz in Y, $x \in Y$ und $x_\lambda \to x$ bzgl. $\Theta/_Y$

$\iff x_\lambda \to x$ bzgl. Θ

(v) $f : (X, \Theta) \to (Z, \Theta_Z)$ stetig $\Longrightarrow f|_Y : (Y, \Theta/_Y) \to (Z, \Theta_Z)$ stetig

Beweis: [UE] □

5.5 BSP (Spurtop)

(i) $(\mathbb{R}, \Theta_n)$, $Y = [0, 1)$ mit Spurtop $\Theta_n|_Y$

denn $A_1 = Y \cap (-1, \frac{1}{2})$

$A_1 = [0, \frac{1}{2})$ offen in Y bzgl $\Theta_n|_Y$; Sprechweise: offen in Y

ACHTUNG: offen in $Y \neq$ offen und in Y, denn A_1 nicht offen in $\mathbb{R}$.

$A_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ offen in Y, offen in $\mathbb{R}$ $[A_2 = Y \cap A_2]$

$A_3 = [0, \frac{1}{2}]$ abg in Y, abg in $\mathbb{R}$ $[A_3 = Y \cap A_3]$

$A_4 = [\frac{1}{2}, 1)$ abg in Y, nicht abg in $\mathbb{R}$ $[A_4 = Y \cap [\frac{1}{2}, 1]]$

(ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$, $Y = \mathbb{Z}$ mit SpurTop (analog für $\mathbb{N}$):

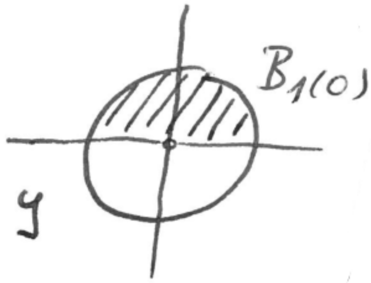
$$\mathcal{O}_n|_{\mathbb{Z}} = \mathcal{O}_{dis}, \text{ denn } \{k\} = \mathbb{Z} \cap \underbrace{(k-\tfrac{1}{2}, k+\tfrac{1}{2})}_{\in \mathcal{O}_n} \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

(iii) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$, $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ mit Spurtop:

$\{\frac{1}{n}\}$ ist offen, denn $\{\frac{1}{n}\} = Y \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

aber die Spurtop ist nicht diskret, denn eine U-Basis von 0 in Y ist $V_k = Y \cap B_{\frac{1}{k}}(0) = \{0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots\}$.

(iv) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_n)$, $Y = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$



$M := \{x = (x_1, x_2) \in B_1(0) \mid x_2 \geq 0\}$ ist abg in Y

$[M = B_1(0) \cap \{x_2 \geq 0\}]$ aber nicht abg in $\mathbb{R}^2$.

§5.2. Transport von Topologien entlang von Abbildungen

5.6 Motivation (Transport entlang einer Abb)

Initiale Top

$f: X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben

X: Menge; $(Y, \mathcal{O}_Y)$: top. Raum

will auf X (Pfeilbeginn) eine interessante Top $\mathcal{O}_X$ definieren, sodass f bzgl. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ stetig.

Finale Top

$f: (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ gegeben

$(X, \mathcal{O}_X)$: top. R.; Y: Menge

will auf Y (Pfeilende) eine interessante Top $\mathcal{O}_Y$ definieren, sodass f bzgl. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ stetig.

Zur Stetigkeit von $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$

$$f \text{ stetig} \iff f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_X$$

$\mathcal{O}_Y$ gegeben ... $\mathcal{O}_X$ muss mindestens so groß sein, dass es $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ enthält

- $\mathcal{O}_X$ maximal: $\mathcal{O}_X = 2^X$ (diskret) ok aber uninteressant
- $\mathcal{O}_X$ minimal: $\mathcal{O}_X = f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$, d.h.

  $O \in \mathcal{O}_X :\iff O = f^{-1}(G),\ G \in \mathcal{O}_Y$

  initiale Top

$\mathcal{O}_X$ gegeben ... $\mathcal{O}_Y$ darf maximal so groß sein, dass $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ in $\mathcal{O}_X$ reinpasst.

- $\mathcal{O}_Y$ minimal: $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{KL}$ (Klumpen) ok aber uninteressant
- $\mathcal{O}_Y$ maximal: genau so dass

  $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$, d.h.

  $G \in \mathcal{O}_Y :\iff f^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X$

  finale Top

5.7 DEF + PROP (initiale & finale Top)

(i) Sei $f: X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ gegeben. Die <u>initiale Top</u> auf X bzgl. f ist definiert als
$$\mathcal{O}_X := \{ f^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{O}_Y \}.$$
Sie ist die <u>gröbste</u> Top auf X, sodass f stetig ist.

(ii) Sei $f: (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ gegeben. Die <u>finale Top</u> auf Y bzgl. f ist definiert als
$$\mathcal{O}_Y := \{ G \subseteq Y \mid f^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X \}.$$
Sie ist die <u>feinste</u> Top auf Y, sodass f stetig ist. 18.VO 27.5

19.VO 1.6.

<u>Beweis</u> (i) gröbste ist klar nach 5.6.

(O1) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ offen, $X = f^{-1}(Y)$ offen

(O2) $\bigcup_i O_i = \bigcup_i f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i G_i})$ offen

(O3) $\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcap^n f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\overbrace{\bigcap^n G_i}^{\in \mathcal{O}_Y})$ offen

(ii) analog; <u>beachte</u> in der Def kommt wiederum f^{-1} vor [und nicht etwa die Bilder offener Mengen!] $\square$

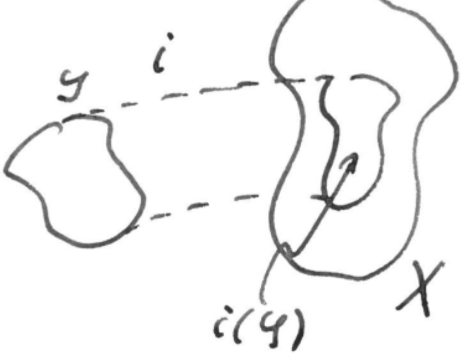
5.8 BEM (Spurtop als initiale Top)

Sei $Y \subseteq X$, $(X, \mathcal{O}_X)$ t.R. und $i: Y \to X$; $i(y) = y$ die (kanonische) <u>Einbettungsabbildung</u>.

ACHTUNG: Gegenüber 5.6–5.7 sind die Rollen von X und Y vertauscht!

Es gilt $\boxed{\forall A \subseteq X:\ i^{-1}(A) = A \cap Y}$, denn $x \in i^{-1}(A) \Leftrightarrow$

$x \in Y \wedge A \ni i(x) = x \Leftrightarrow x \in Y \cap A$



Nach Def der initialen Top $\mathcal{O}_Y$ gilt also

$$\mathcal{O}_Y = \{ i^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{O}_X \}$$
$$= \{ G \cap Y \mid G \in \mathcal{O}_X \}.$$

nach obigem

Also ist $\mathcal{O}_Y$ genau die Spurtopologie; sie ist damit die gröbste Top, sodass i stetig.

5.9 BSP (Quotiententopologie) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ t.R. und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit $Y := X/\sim$ den Quotienten von X modulo $\sim$

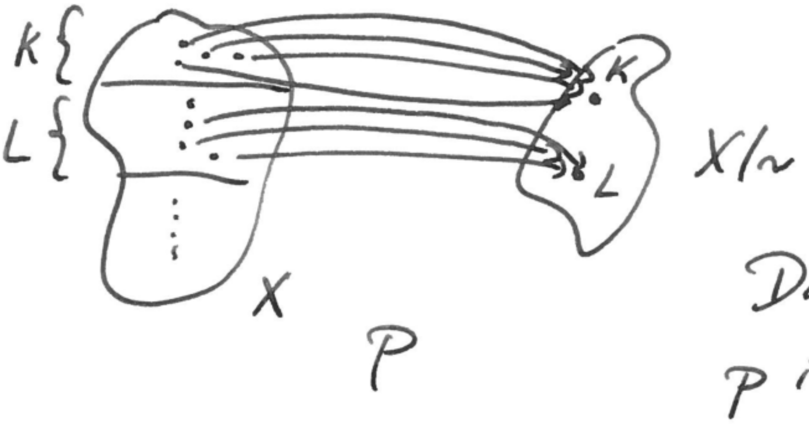
[d.h. $Y = X/\sim$ ist die Menge der Äquivalenzklassen [vgl. Einf. Math. Arb. 4.2.12]

Äquivalenzklassen: $C_x \equiv [x] \equiv \bar{x} := \{ y \in X \mid x \sim y \}$

Quotient: $X/\sim := \{ [x] \mid x \in X \}$]

Wir topologisieren den Quotienten mittels der (kanonischen) Projektion

$$p: X \longrightarrow X/\sim$$
$$x \longmapsto [x]$$



Die finale Top auf $X/\sim$ bzgl. p ist gegeben durch

$$\mathcal{O}_Y = \{ G \subseteq X/\sim \mid p^{-1}(G) \in \mathcal{O}_X \}.$$

Sie wird als <u>Quotiententopologie</u> auf $X/\sim$ bezeichnet.

<u>BSP</u>: V VR; W Teilraum von V, $v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$

$$V/\sim \, = V/W = \{ v + W \mid v \in V \}$$

<u>Lesetipp</u>: [J, III §1–§5]

<u>5.10 Bem</u> (Transport entlang mehrerer Abb.)

<u>Initiale Top</u>

$$X \begin{array}{l} \xrightarrow{f_i} (X_i, \mathcal{O}_i) \\ \xrightarrow[f_j]{} (X_j, \mathcal{O}_j) \end{array}$$

Wir suchen die <u>gröbste Top</u> sodass alle f_i <u>stetig</u> sind, d.h.

$$f_i^{-1}(\mathcal{O}_i) \subseteq \mathcal{O}_X \quad \forall i$$

also $\mathcal{O}_X$ minimal s.d.

$$\mathcal{O}_X \supseteq \underbrace{\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(O_i)}_{\text{erfüllt i.A. nicht (O2),(O3)}} \quad O_i \in \mathcal{O}_i \ \forall i$$

<u>Problem</u>

<u>Finale Top</u>

$$\begin{array}{l} (X_i, \mathcal{O}_i) \xrightarrow{f_i} \\ (X_j, \mathcal{O}_j) \xrightarrow[f_j]{} \end{array} Y$$

Wir suchen die <u>feinste Top</u> s.d. alle f_i stetig sind, d.h.

$$f_i^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subseteq \mathcal{O}_i \quad \forall i$$

$$\mathcal{O}_Y := \{ G \subseteq Y \mid f_i^{-1}(G) \in \mathcal{O}_i \ \forall i \}$$

heißt <u>finale Top</u> bzgl der f_i, X_i

[(O1)–(O3) folgt wie in 5.7]

Ausweg im Falle der initialen Top: Erkläre

$$\mathcal{S} := \{ f_i^{-1}(O_i) \mid i \in I,\ O_i \in \mathcal{O}_i \}$$

zur Subbasis der <u>initialen Top</u>.

5.11 BEM (Produkttop als initiale Top)

<u>Zuvor</u>: Wh der Def <u>beliebiger Produktmengen</u>. Seien X_i Mengen wobei $i \in I$ eine Indexmenge [vgl EMA 4.1.38, 4.3.43]

- Falls $|I| = n\ (<\infty)$: $\displaystyle\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\ \forall i \in I \}$

  Menge der n-Tupel

- Falls I beliebig: $\displaystyle\bigtimes_{i\in I} X_i = \prod_{i \in I} X_i = \{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i\ \forall i \in I \}$

  Menge der Abb auf I, die $j \in I$ ins richtige X_j abbildet

  Schreibweise $\prod_{i \in I} X_i \ni x = (x_i)_i$

<u>JETZT</u>:

Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ t.R, $X := \prod_{i\in I} X_i$. Für $k \in I$ sei pr_k die <u>k-te Projektionsabb.</u>

$$pr_k : X \to X_k, \quad (x_i)_i \mapsto x_k$$

Wir sehen nun auf X die initiale Top bzgl der pr_k

$$X = \prod X_i \xrightarrow{pr_k} (X_k, \mathcal{O}_k), \quad X = \prod X_i \xrightarrow{pr_\ell} (X_\ell, \mathcal{O}_\ell), \quad \vdots$$

Diese Top $\mathcal{O}_X$ hat als Subbasis (nach 5.10) gerade die $pr_k^{-1}(O_k)$ $O_k \in \mathcal{O}_k$

Nun gilt: $\underline{pr_k^{-1}(O_k)} = \{ x = (x_i)_i \mid pr_k(x) \in O_k \}$

$$= \{ x = (x_i)_i \mid x_k \in O_k \} = \underline{\prod_{i \neq k} X_i \times O_k}$$

Diese Subbasismengen kennen wir aber aus 2.15. (i)

Es sind genau die Subbasismengen der Produkttop

auf $X = \prod X_i$. Wegen 2.13. (Eindeutigkeit!)
ist die Produkttop die initiale Top bzgl. der Projektionen; sie ist also die gröbste Top sodass alle pr_k stetig sind.

Dass die Produkttop die „richtige" Top auf $\prod X_i$ ist und nicht die Boxtopologie [vgl. 2.15(ii)] belegt

5.12 PROP Die Produkttop $\mathcal{O}$ auf $\prod X_i$ ist die Topologie der „koordinatenweisen Konvergenz", d.h

$$x_\lambda \to x \text{ in } (\prod X_i, \mathcal{O}) \iff \forall k: \ pr_k(x_\lambda) \to pr_k(x) \text{ in } (X_k, \mathcal{O}_k)$$

Beweis: ($\Rightarrow$) pr_k stetig nach 5.11, wende 4.6. an.

19. VO 1.6.

20. VO 2.6.

($\Leftarrow$) Sei $U \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{O}}$; oBdA [2.19] U offen $\overset{2.8(iii)}{\Longrightarrow} \exists V: x \in V \subseteq U$
mit $V = \prod_{i \in I} Z_i$; $Z_i \neq X_i$ für nur endlich viele $i \in I$.
(vgl. 2.17(ii)) seien dies $i_1, \dots, i_n$
Wähle nun λ_j sd $\forall \lambda \geq \lambda_j: pr_{i_j}(x_\lambda) \in Z_{i_j}$ $(j = 1, \dots n)$
Sei nun $\lambda_0 \geq \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ [wegen (ob)], dann gilt
für $\lambda \geq \lambda_0$ $pr_{i_j}(x_\lambda) \in Z_{i_j}$ $\forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow x_\lambda \in V$
$\Rightarrow x_\lambda \in U$. $\square$

6 KOMPAKTHEIT

6.1. EINLEITUNG: Aus der Analysis sind kompakte kp = abg Intervalle bzw kp Mengen als besonders praktisch bekannt, z.B.

- stetige Fkt auf kp Intervallen sind gleichmäßig stetig
- stetige Fkt auf kp Mengen nehmen max. & min an.

Außerdem sind kp Mengen in $\mathbb{R}^n$ einfach zu charakterisieren

- [Heine-Borel] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kp $\iff$ A beschr + abg.

In allgemeinen Situationen ist Kompaktheit nicht mehr so einfach charakterisierbar – wir werden einige Kriterien f. Kompaktheit diskutieren; was bleibt ist ein starker Bezug zu kp und abgeschlossen.

Insgesamt ist Kompaktheit ein freundlicher/nützlicher Begriff; kp Räume sind insbesondere deswegen einfacher, da sie es erlauben lokale Eigenschaften auf den ganzen (kp!) Raum fortzusetzen. [vgl. 6.5 BEM]

6.2. DEF (Kompakt) $(X, \mathcal{O})$ t.R.

(i) X heißt <u>kompakt</u>, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h.

$$\underbrace{\forall (O_i)_{i \in I},\ O_i \text{ offen},\ X = \bigcup_{i \in I} O_i}_{(O_i)_i \text{ offene Überd. von } X} \implies \underbrace{\exists n,\ i_1, i_2, \dots i_n \in I:\ X = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}}_{O_{i_1}, \dots, O_{i_n} \text{ endl. Teilüberd.}}$$

(ii) $Y \subseteq X$ heißt <u>kompakt</u>, wenn $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ kp ist.

6.2A <u>WARNUNG</u>: Oft wird (i) als quasikp bezeichnet und kp als T_2 + quasikp definiert z.B. [BOURBAKI]

6.3 BEM (Kompaktheit)

(i) 6.2(ii) $\iff Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ (O_i offen in X) $\Rightarrow \exists n, i_1, \dots, i_n: Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_i$

Es ist also egal, ob Y „genau passend" (mit $=$) überdeckt wird, oder „überstehend" (mit $\subseteq$) mittels X-offener Mengen. [Hausüburg]

(ii) Kompaktheit ist eine <u>INTRINSISCHE</u> Eigenschaft; es kommt nicht darauf an ob oder wie Y in einem größeren top. Raum liegt, sondern nur auf die Top auf Y an.

Im Unterschied dazu ist <u>Abgeschlossenheit</u> <u>nicht</u> intrinsisch:

$(0,1)$ ist abg in $(0,1)$ mit der Spurtop

$(0,1) \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ ist nicht abgeschlossen.

NICHT VORGETRAGEN

(iii) <u>WARNUNG</u>: In 6.2(i) ist die <u>Reihenfolge</u> der Quantoren <u>essentiell</u>: (Für <u>jede</u> ÜD $\exists$ endl. Teil-ÜD).

Beachte dazu folgende Beispiele auf $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$

- $\{(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ offene ÜD von $(0,1)$

  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ist endl. TÜD aber $(0,1)$ ist <u>nicht kp</u>

- $\{(\frac{k}{n}, \frac{k+2}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = -1, \dots, n-1\}$

  ist offene ÜD von $[0,1]$ und $\{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})\}$ ist endl. TÜD aber das genügt nicht als Beweis f. die Kompaktheit von $[0,1]$

- $\{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \mid n \geq 3\}$ ist offene ÜD von $(0,1)$ und besitzt keine endl. TÜD; damit ist $(0,1)$ nicht kp.

6.4 BEOBACHTUNG (Einfache kp. Mengen)

(i) Jede <u>endl. Menge</u> ist kp, denn ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_i G_i$, wähle zu jedem $1 \leq j \leq n$: $G_{i_j} \ni x_j \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$

(ii) Jede <u>Vereinigung von</u> zwei (endlich vielen) kp Mengen ist kompakt; ... $A \cup B \subseteq \bigcup_{\text{endl}} \cup \bigcup_{\text{endl}} = \bigcup_{\text{endl.}}$

6.5 BEM (Vom Nutzen der Kompaktheit)

In einem kompakten Raum $(X, \mathcal{O})$ kann auf folgende Art von lokalen Eigenschaften auf globale Eig. geschlossen werden:

Sei (E) eine Eigenschaft, die offene Mengen in X haben können oder nicht.

Zusätzlich gelte: Haben U, V die Eig. (E), dann auch $U \cup V$.

Dann haben wir folgendes

<u>„THM"</u>: Gilt (E) lokal (d.h. $\forall x\ \exists$ offene Umgebung von x mit (E)), dann gilt (E) auf ganz X.

<u>„Beweis"</u>: $\forall x$ sei U_x eine offene Umgebung von x mit (E).
Es gilt $X = \bigcup_{x \in X} U_x$; X kp $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n$: $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.
Nach obigem und Induktion haben endliche Vereinigungen von offenen Mengen mit (E) wieder (E) $\Rightarrow X$ hat (E). ⧠

<u>BSP</u>: $f: X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt (z.B. f stetig)
[d.h. $\forall x \in X\ \exists U_x \in \mathcal{U}_x\ \exists M_x: |f(x)| \leq M_x\ \forall x \in U_x$]

X kp $\Rightarrow f$ beschränkt.

<u>6.6 SATZ</u> (Stetige Bilder kp Räume sind kp) $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ t.R.

$f: X \to Y$ stetig, X kp $\Rightarrow f(X)$ kp

<u>Beweis</u>: Sei $(O_i)_i$ offene ÜD von $f(X) \Rightarrow (f^{-1}(O_i))_i$ offene ÜD v. X
[denn $f^{-1}(O_i)$ offen und $X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_i O_i) = \bigcup_i f^{-1}(O_i)$]
X kp $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n$: $X = \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(O_{i_k}) \Longrightarrow$

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(O_{i_k})\Big) = \bigcup_{k=1}^n f(f^{-1}(O_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}. \qquad ⧠$$

6.7 SATZ (Kompaktheit via HW von Netzen)

$(X,\mathcal{O})$ kp $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ Jedes Netz in X hat einen HW in X

20. VO 3.6.

$\overset{②}{\Longleftrightarrow}$ Jedes Netz in X hat eine in X konv. Verfeinerung

21. VO, 8.6.

Beweis ($\overset{①}{\Longrightarrow}$) Indir. ang. $\exists\, (x_\lambda)_\lambda$ in X ohne HW in X, d.h.

$\forall x\in X\ \exists U_x\in\mathcal{U}_x\ \exists \lambda_x: \forall \lambda\geq\lambda_x\ \ x_\lambda\notin U_x$

Wähle U_x OBdA [wegen 2.18] offen. Dann gilt

$X=\bigcup_{x\in X}U_x \overset{kp}{\Longrightarrow} \exists\, x_1,\dots,x_n: X=\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Wähle nun $\lambda_0\geq\lambda_{x_k}\ \forall k$ (hat!) $\Rightarrow x_{\lambda_0}\notin U_{x_k}\ \forall k \Rightarrow x_{\lambda_0}\notin X$. ↯

($\overset{①}{\Longleftarrow}$) Sei $X=\bigcup_{i\in I}O_i$, O_i offen und indir. ang. $\nexists$ endl. TeilÜD

Sei $\Lambda:=\{F\subseteq I \mid F \text{ endl.}\}$, $F_1\leq F_2 :\Leftrightarrow F_1\subseteq F_2 \Rightarrow (\Lambda,\leq)$ g.M.

Es gilt $\forall F\in\Lambda: \bigcup_{i\in F}O_i\neq X \Rightarrow \exists\, x_F\in X\setminus\bigcup_{i\in F}O_i$

Lt. Voraus. hat $(x_F)_F$ einen HW $x\in X$ und $\exists\, i_0: x\in O_{i_0}\in\mathcal{U}_x$

Da $\{i_0\}\in\Lambda \Rightarrow \exists F\in\Lambda: F\geq\{i_0\}: x_F\in O_{i_0}$

Das widerspricht aber der Konstruktion von $(x_F)_F$, denn

$x_F\in X\setminus\bigcup_{i\in F}O_i\subseteq X\setminus O_{i_0} \Rightarrow x_F\notin O_{i_0}$.

($\overset{②}{\Longleftrightarrow}$) Folgt sofort aus 3.15. $\square$

6.8 SATZ (Kompakt vs. Abgeschlossen) $(X,\mathcal{O})$ t.R. $A \subseteq X$. Dann gilt

(i) X kompakt: A abg $\Rightarrow$ A kp

[Abg. Teilmengen kompakter Räume sind kp]

(ii) X T_2 : A kp $\Rightarrow$ A abg.

[Kp Teilmengen eines Hausdorffraumes sind abg.]

6.9 KOR: X kp, T_2, $A \subseteq X$: A abg $\Leftrightarrow$ A kp

6.10 WARNUNG zu 6.8

(i) ist ohne kp falsch: $X=\mathbb{R}=A$ mit $\mathcal{O}_n$

(ii) ist ohne T_2 falsch: $(X,\mathcal{O}_{ke})$; jede endliche Menge A ist kp (6.4(ii)), aber nur $\emptyset, X$ sind abg.

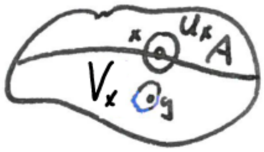
Beweis von 6.8 (i) Sei $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, O_i offen $\Rightarrow X = A \cup A^c =$

$= \bigcup_{i\in I} O_i \cup \underbrace{A^c}_{\text{offen!}} \overset{X\,kp}{\Longrightarrow} \exists\, i_1,\dots,i_n$ $X = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \cup A^c \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$

(ii) Wir zeigen A^c ist offen; sei $y \in A^c$; $\forall x \in A$ $(x \neq y!)$

$\overset{T_2}{\Longrightarrow} \exists\, U_x, V_x$ offen: $x \in U_x$, $y \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$ [wegen T_2];

$A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x \overset{kp}{\Longrightarrow} \exists\, x_1 \dots x_n$: $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} =: U$.



Nun ist $y \in V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$; V offene Umgebung von y und

$y \in V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_{x_k}^c = \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}\right)^c \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}_y$.

$\square$

Wir sind nun in der Lage einen hübschen Satz über Homöomorphie zu beweisen [vgl. dazu 4.9.]

6.11 SATZ (Homöomorphien von kp in T_2-Räume)

Sei $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig + bijektiv, X kp, Y T_2. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: ?? $f^{-1}=:g: Y\to X$ ist stetig; verwende 4.4(ii)

$A\subseteq X$ abg $\overset{6.8(i)}{\Longrightarrow}$ A kp $\overset{6.6.}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ kp $\overset{6.8(ii)}{\Longrightarrow}$ $f(A)=g^{-1}(A)$ abg. $\square$

6.12 KOR: Eine kp Topologie kann Hausdorffsch nicht vergröbert werden, d.h. $(X,\mathcal{O}_1)$ kp, $\mathcal{O}_2$ T_2-Top auf X mit $\mathcal{O}_2\subseteq\mathcal{O}_1\Rightarrow\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$.

Beweis: $id:(X,\mathcal{O}_1)\to(X,\mathcal{O}_2)$ stetig, da $id^{-1}(\mathcal{O}_2)=\mathcal{O}_2\subseteq\mathcal{O}_1$.

6.11 $\Rightarrow id^{-1}$ stetig $\Rightarrow\mathcal{O}_1\subseteq\mathcal{O}_2\Longrightarrow\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$. $\square$

6.13 SATZ Jeder kp T_2-Raum ist normal [vgl. 3.22(vi)]

Beweis: Wir müssen T_1+T_4 zeigen. $T_2\Rightarrow T_1$ [3.22(i)]; bleibt T_4 ??:

Seien $A,B\subseteq X$ abg, $A\cap B=\emptyset \overset{6.8(ii)}{\Longrightarrow} A,B$ kp; Wir steigen in den Bew von 6.8(ii) ein: Dort haben wir für A kp und $y\in A^c$ – jetzt $y\in B$! – disjunkte offene Mengen U – jetzt U_y – und V – jetzt V_y – angegeben sodass $A\subseteq U_y$, $y\in V_y$. Nun gilt $B\subseteq\bigcup_{y\in B}V_y \overset{kp}{\Longrightarrow}\exists y_1\dots y_n$: $B\subseteq\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Setze $U:=\bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$, $V:=\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Dann gilt U,V offen, $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ und

$$U\cap V=U\cap\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}=\bigcup_{k=1}^n(U\cap V_{y_k})\subseteq\bigcup_{k=1}^n(U_{y_k}\cap V_{y_k})=\emptyset.\qquad\square$$

Der wahrscheinlich wichtigste Satz über kp Mengen ist

6.14 THM (Tychonoff) $(X_i, \mathcal{O}_i)$ t.R $\forall i \in I$ (beliebig)

$$\boxed{X = \prod_{i \in I} X_i \text{ kp} \iff \forall i \in I: X_i \text{ kp}}$$

bzgl Produkttopologie

Beweis: ($\Rightarrow$) Folgt sofort aus 6.5, da $pr_k : X \to X_k$ [vgl. 5.11] stetig und surjektiv

($\Leftarrow$) o.B. [Diese, die nichttriviale Richtung benutzt

21.VO 18.6. das Auswahlaxiom - oder eine dazu äquivalente Bed - und ist über Filter [vgl. 3.16(ii)] „einfach" zu führen.]

22.VO, 10.6.

6.15 BEM (Kompaktheit im Anschluß an die Analysis)

Im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von Heine-Borel ($A \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$A \text{ kp} \iff A \text{ beschränkt + abg.}$$

Diese Aussage hat in allg top. Räumen keinen Sinn ①; dort wo sie Sinn hat ist sie i.a. falsch ②

ad 1: Was soll in t.R. beschränkt bedeuten; dieser Begriff ist nur in spezielleren Räumen (z.B MR) definierbar.

oC 2: In MR gilt

$$A \text{ kp} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} A \text{ beschr} + \text{abg}$$

($\Longrightarrow$) In MR ($\Rightarrow$ AA1 2.53(ii)) gilt 6.7 mit Folgen statt Netzen [vgl. 2.56(i)]; Also A kp $\Leftrightarrow$ Jede Folge in A hat eine in A konvergente TF.

Dieser Begriff wird auch als Folgenkompaktheit bezeichnet

Nun kann A nicht unbeschränkt sein, denn sonst könnte eine Folge ohne konv. TF konstruiert werden. Ebenso muß A abg. sein, sonst sei $(x_n)_n$ Folge in A und $x_n \to x \notin A$ [3.10(i) in AA1-Räumen für Folgen] Jede TF von x_n konvergiert aber ebenfalls gegen x, das wegen der Kompaktheit aber in A liegen muß ↯.

($\not\Longleftarrow$) In jedem ∞-dimensionalen NVR ist die abg. Einheitskugel $\{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ beschr + abg aber nicht kp! z.B. $\ell^2 := \{x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum x_n^2 < \infty\}$ mit $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_n x_n^2}$ ist Hilbertraum und die Folge der Standardeinheitsvektoren $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ erfüllt $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $\forall m, n$. Daher $\nexists$ konv. TF.

n.te Stelle

ALSO VORSICHT! Es ist Aufgabe der Top bzw. der linearen Funktionalanalysis auf einzelne Räume zugeschnittene Kompaktheitskriterien zu liefern (z.B. Satz v. Arzela-Ascoli für $C[a,b]$; glm. quadr. Summierbarkeit in ℓ^2)

10.6.2015

Zusammenfassung: Kompaktheit in der Analysis + Anderswo

NICHT VORGETRAGEN

THM: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent

(i) Jede Folge in A hat einen HW (resp. eine in A konvergente TF)

(ii) Jede offene Überdeckung von A hat eine endl. Teilüd.

(iii) A ist beschränkt und abg.

BEM (1) Meist wird (i) als Definition für Kompaktheit verwendet. In allgemeineren Räumen heißt (i) Folgenkompaktheit.

(2) Eigenschaft (ii) heißt meistens die Überdeckungseigenschaft.

(3) In MR, AA1-Räumen gilt (ii) $\Leftrightarrow$ (i). [Überall wo Folgen die Konvergenz beschreiben ist Folgenkp äquivalent zur Überdeckungseigenschaft; manchmal als Überdeckungssatz von Heine-Borel bezeichnet]

(4) (i) resp (ii) $\Rightarrow$ (iii) bleibt in MR richtig [6.15]. Darüberhinaus ist (iii) (genauer: beschränkt) sinnlos.

(5) (iii) $\Rightarrow$ (ii) resp (i) ist schon in NVR mit $\dim = \infty$ i.a. falsch; daher erst recht in MR.

(6) In top. Räumen gilt immerhin (ii) $\Leftrightarrow$ (i) [= (i) für Netze] [6.7]

(7) — " — gibt es starke Beziehungen zu kp & abg. [6.8, 6.9]

$\boxed{7}$ ZUSAMMENHANG

23.VO
15.6.

7.1 MOTIVATION: Einer der wichtigsten Sätze der Analysis 1 ist der Zwischenwertsatz; er beruht auf dem "Zusammenhang" der reellen Zahlen [vgl. 1.19]. Wir wollen diesen Begriff nun in allgemeinen top. Räumen definieren und seine wichtigsten Eigenschaften studieren.

[Nebenbei bemerken wir, dass wir unser Programm TC aus 0.1 damit zu Ende führen...]

7.2 DEF (Disjunktion). $(X, \mathcal{O})$ t.R. Eine <u>Disjunktion</u> von X ist ein Paar nichtleerer, disjunkter offener Teilmengen G_1, G_2 von X sodass $X = G_1 \cup G_2$.

7.3 BEM (Disjunktion, offen+abgeschlossene Mengen)

(i) G_1, G_2 können als „getrennte Teile" von X angesehen werden, die nichts voneinander wissen — im top. Sinne. z.B. $x \in G_1 \Rightarrow G_1 \in \mathcal{U}_x$ und G_2 ist "weit weg" von x weil es durch G_1 abgeschirmt wird z.B.:

$X = (0,1) \cup [2,3]$, $G_1 = (0,1)$, $G_2 = [2,3]$

ist offen in $\mathcal{O}_n|_X$! [vgl. 5.5(i)]

(ii) G_1, G_2 sind genau die nicht-trivialen offen-abgeschlossenen Mengen in X.

LETZTE WARNUNG: offen ist nicht das Gegenteil von abgeschlossen!

[engl: "clopen" dt. Rückübersetzung "abgeschloffen" ???]

Beweis:

G_1, G_2 Disjunktion $\Rightarrow$ G_1 offen, $X \setminus G_2 = G_1$ auch abg. G_2 analog

G offen, abg, $\neq \emptyset$, $\neq X$ $\Rightarrow$ G, $\tilde{G} = X \setminus G$ ist Disjunktion.

7.4 DEF (Zusammenhang) Sei $(X, \mathcal{O})$ top. Raum

(i) X heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ X hat keine Disjunktion

[d.h. $X = G_1 \cup G_2$ beide offen, nicht leer, disjunkt ist nicht möglich!

d.h. [vgl. 7.3(ii)] Die einzigen offen-abgeschlossenen Menge in X sind: $X, \emptyset$.]

(ii) $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ $(A, \mathcal{O}|_A)$ ist zsh.

7.5 BSP (zsh. Räume) (i) $(a,b) \in \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}_n$ ist zsh.

Denn angenommen nicht $\Rightarrow \exists$ Disj: G_1, G_2. Wähle $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ und oBdA $g_1 < g_2$. Sei $s = \inf\{x \in G_2 \mid g_1 < x\}$. Dann ist $a < g_1 \leq s \leq g_2 < b$

$\Rightarrow s \in (a,b)$ aber $s \notin G_1$, $s \notin G_2$, denn

- $s \in G_1 \Rightarrow G_1$ (offen!) ist Umgebung von s. $\overset{\text{Def des inf}}{\Rightarrow}$ G_1 enthält Pkte aus G_2 ↯
- $s \in G_2 \Rightarrow s \neq g_1$ und $s \geq g_1 \Rightarrow g_1 < s \overset{G_2 \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists\ \varepsilon$-Umg. von s mit $\varepsilon < s - g_1$, die ganz in G_2 liegt. ↯ zur Def des Inf.

Also G_1, G_2 keine Disj. Widerspruch. $\square$

(ii) Die leere Menge und jede einpunktige Menge ist zsh.

(iii) Jede mind. 2-punktige Menge mit $\mathcal{O}_{dis}$ ist nicht zsh.

(iv) $\mathbb{Q}$ mit der Spurtop von $\mathbb{R}$ ist nicht zsh, denn

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})\right) \cup \left(\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)\right).$$

7.6 BEM (Zusammenhangskomponenten)

Jeder t.R lässt sich in Zusammenhangskomponenten zerlegen, d.h. maximale zsh. Teilmengen (ohne Beweis).

Für "schöne Mengen" ist das genau das erwartete; im Allgemeinen: Vorsicht!

Die Zusammenhangsk. von $\mathbb{Q}$ sind die einptigen Mengen $\{r\}$
Die einzige —"— von $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ selbst; diese Aussage gilt für alle zsh. Räume

7.7 BEM (Vom Nutzen des Zusammenhangs)

In einem zsh. Raum kann auf folgende Art von lokalen Eigenschaften auf globale Eig. geschlossen werden:

Sei (E) eine Eigenschaft, die Punkte in X haben können oder nicht und es gelte

(1) $\exists x$ in X, das (E) hat

(2) Hat x (E) dann auch alle y in einer Umgebung von x

(3) Hat x (E) nicht, —"— kein y —"— —"— ——.

Dann gilt das folgende

"THM." Ist X zsh, dann haben alle $x \in X$ Eigensch. (E).

"Beweis": Sei $G_1 = \{x \in X \mid x \text{ hat } (E)\}$, $G_2 = \{x \in X \mid x \text{ hat } (E) \text{ nicht}\}$

G_1, G_2 offen wegen (1), (2), disjunkt und $X = G_1 \cup G_2$.

Da X zsh $\nexists$ Disjunktion, $G_1 \neq \emptyset \Rightarrow G_2 = \emptyset \Rightarrow X = G_1$. $\square$

Bsp: $f: X \to Y$ lokal konstant $[\forall x\ \exists U \in \mathcal{U}_x : f|_U = \text{const}]$

X zsh $\Rightarrow f$ konstant auf X, sonst wäre

$G_1 = \{x \mid f(x) = y\}$ $G_2 = \{x \mid f(x) \neq y\}$ Disjunktion.

einer der lokal von f angenommenen Werte

7.8 SATZ (Stetige Bilder zsh. Räume)

Stetige Bilder zsh. Räume sind zusammenhängend.

Beweis: Indirekt sei $f: X \to f(X) \subseteq Y$, $f(X)$ nicht zsh $\Rightarrow$

$\exists$ Disjunktion $G_1, G_2 \Rightarrow f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2)$ ist Disjunktion von X. $\lightning$ $\square$

7.9 SATZ (Zsh. Mengen in $\mathbb{R}$) Die mindestens zweipunktigen zsh. Mengen in $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}_n$ sind genau die Intervalle.

Beweis "$\Leftarrow$" wie in Bsp 7.5(i) auch für abg, halboffene Int.

"$\Rightarrow$" A zsh, $x_1 < x_2 \in A \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq A$ $(*)$, denn angenommen nicht

$\exists s \in (x_1, x_2)$ aber $s \notin A \Rightarrow A = \big(A \cap (-\infty, s)\big) \cup \big(A \cap (s, \infty)\big)$

Und das wäre eine Disjunktion von A

Aber $(*) \Rightarrow A$ ist Intervall, denn setze $a = \inf A$

$\Rightarrow$ entweder $a \in A \Rightarrow A \subseteq [a, \infty)$ (also $A = [a, \dots]$ oder $= [a, \dots)$)

oder $a \notin A \Rightarrow A \subseteq (a, \infty)$ (also $A = (a, \dots]$ oder $= (a, \dots)$)

und analog für $b = \sup A$. $\square$

7.10 KOR (Zwischenwertsatz)

Sei $f : (X, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ stetig, X zsh. Dann gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ und } f(x_1) < t < f(x_2) \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = t.$$

[Im Fall X ein reelles Intervall ergibt sich der ZWS der Analysis 1.] 23. VO 15.6.

Beweis: $7.8 \Rightarrow f(X)$ zsh $\overset{7.9}{\Rightarrow} f(X)$ ist Intervall;

mit $f(x_1), f(x_2)$ ist auch $t \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = t$. $\square$

Zum Schluss des Kap. stellen wir noch einen top. Begriff vor. 24. VO 17.6.

7.11 DEF (Wegzusammenhang) $(X, \mathcal{O})$ t.R.

X heißt wegzusammenhängend (bogenweise zusammenh.)

$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X \ \exists c : [0,1] \to X$ stetig: $x = c(0)$, $y = c(1)$

[c wird als stetiger Weg von x nach y bezeichnet]

7.12. PROP ((Weg)-zsh) $\boxed{X \text{ wegzsh} \ \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \ X \text{ zsh}}$

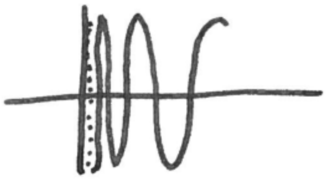
Beweis: „$\Rightarrow$" Wäre G_1, G_2 Disj. von X, wähle $x \in G_1$, $y \in G_2$

lt. Voraus. $\exists$ stetiger Weg von x nach y; $c^{-1}(G_1)$, $c^{-1}(G_2)$

Disj. von $[0,1]$ ↯ zu 7.8.

"$\not\Leftarrow$" $\{(x,\sin\frac{1}{x}) \mid x\in(0,1]\} \cup \{0\}\times[-1,1]$

mit der Spurtop des $\mathbb{R}^2$ ist zsh
aber nicht wegzsh [CR, p152]



7.13 Bem ((Weg)-zsh)

Die Umkehrung von 7.12. stimmt, falls X zsh und X lokal wegzsh, d.h. jedes $x\in X$ besitzt eine wegzsh. Umgebung.

8 Metrische Räume, Teil 2: Spezielle Resultate über M.R.

8.1. Einleitung: In diesem letzten Kapitel befassen wir uns mit Eigenschaften M.R., bei denen es wirklich auf die Metrik ankommt – und nicht nur die von der Metrik induzierte Top. Diese Inhalte werden trotzdem traditionell als Teil der mengentheoretischen Topologie gesehen.

vgl. Bem 4.12

Aus der Vielzahl möglicher Themen behandeln wir 3 besonders für die Analysis relevante:

- Vervollständigung M.R.
- Fixpunktsatz von Banach
- Satz von Baire

8.2. Notation: In diesem Kapitel sei (X, d) immer M.R und $\mathcal{O}_d$ die von d induzierte Topologie (vgl. 2.4(ii)) auf X; die sogenannte metrische Topologie auf X.

$$\left[\ \mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O\ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O\}\ \right]$$

§ 8.1. Vervollständigung M. R.

Lesetipp: [J, IV]

8.3 Erinnerung = 1.20(i) (Cauchy Folge) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt <u>Cauchy Folge</u> $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n\geq N\ d(x_m,x_n)<\varepsilon$

8.4. Bem (CF und Konvergenz)

(i) $(x_n)_n$ konvergent $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy, denn

$$d(x_m,x_n)\leq \underbrace{d(x_m,\lim x_k)}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } m \text{ groß}}+\underbrace{d(\lim x_k,x_n)}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \text{ groß}}<\varepsilon$$

(ii) $(x_n)_n$ CF $\not\Rightarrow (x_n)_n$ konvergent, denn sei $X=(0,1]$ mit $d(x,y)=|x-y|$, dann ist $x_n=\frac{1}{n}$ CF in X aber nicht konv. in X.

(iii) Es ist also eine Eigenschaft von X, ob jede CF konvergiert; diese ist von höchster Wichtigkeit, daher...

8.5 Def (Vollständigkeit) (X,d) M.R

X heißt <u>vollständig</u> $:\Leftrightarrow \forall$ CF $(x_n)_n$ in X $\exists x\in X$ mit $\lim x_n=x$.

8.6 Bsp (Vollständige M.R.)

(i) $(\mathbb{R},|\ |)$ ist vollst. [Vollständigkeitsaxiom der Analysis]

(ii) $(\mathbb{R}^n,d_2)$ ist vollst. aber auch mit jeder anderen von einer Norm stammenden Metrik [vgl. Hö, 17.9]

(iii) $(E, \| \, \|)$ NVR $d(x,y) := \|x-y\|$

Ist (E,d) vollständig so heißt $(E, \| \, \|)$ Banach-Raum

(iv) $(E, \langle \, \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprod.

$d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$. Ist (E,d) vollständig, so heißt $(E, \langle \, \rangle)$ Hilbert-Raum.

8.7 BEOBACHTUNG (Vollständigkeit) (ohne Beweise)

(i) $(X, \mathcal{O}_d)$ kp $\Rightarrow$ (X,d) vollst.

(ii) (X,d) vollst, $A \subseteq X$. Dann gilt

$$A \text{ abg.} \Leftrightarrow A \text{ vollst. (bzg. } d|_{A \times A})$$

z.B. ist $C([a,b])$ abg. im Banach-Raum $(B([a,b]), \| \, \|_\infty)$ und daher selbst ein B-Raum.

beschränkte Fkt

8.8. BEM (Bedeutung der Vollst.) Eine wichtige Technik der Analysis ist es die Existenz eines Objekts als Limes einer CF zu konstruieren; klarerweise funktioniert das nur in vollst. Räumen! z.B. wird oft die Lösung einer Gleichung als limes approximativer Lösungen gewonnen [vgl. auch Fixpktsatz v. Banach 8.20.].

8.9. MOTIVATION (Vervollständigung) Wir stellen uns – durch die Wichtigkeit der Vollständigkeit motiviert – die folgende Frage:

Gegeben ein nicht-vollst. M.R. (Wie) Können wir diesen durch Hinzufügen möglichst weniger "neuer Punkte" zu einem vollst. M.R. machen?

Die Antwort lautet: $\boxed{\text{JA}}$, es gibt immer genau eine "Vervollständigung"; sie kann mittels Hinzufügen von Limiten nicht-konv. CF gewonnen werden.

Um das exakt zu machen, benötigen wir etwas Terminologie.

8.10 DEF (Vervollständigung) Sei (X, d) M.R. Ein vollst. M.R. $(\hat{X}, \hat{d})$ mit $X \subseteq \hat{X}$ heißt EINE Vervollständigung von X falls (i) $\hat{d}(x,y) = d(x,y) \quad \forall x, y \in X$

(ii) $\overline{X} = \hat{X}$ (*)

X liegt dicht in $\hat{X}$
d.h. $\hat{X}$ ist möglichst klein,
da jeder "neue" Pkt $x \in \hat{X} \setminus X$ Limes einer Folge in X ist, also nicht weggelassen werden kann. □

die metrischen Strukturen von $X, \hat{X}$ sind kompatibel, d.h.
$\hat{d}|_{X \times X} = d$

24. VO
17.6.

(*) ACHTUNG: Abschluss von X in $\hat{X}$! [$\overline{X}$ in X ist ja gleich X; cf 2.40(iii)]

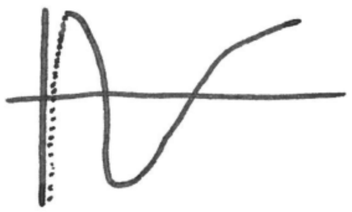
8.12 Bsp (Vervollständigungen)

(i) $X=(0,\infty)$ hat $[0,\infty)$ als eine(!) Vervollständigung.

(ii) $X=\{(x,\sin\frac{1}{x}) \mid x>0\}$; Eine Vervollständigung ist

$X\cup\{0\}\times[-1,1]$.

2 St. VO 22.6.



Diese Bsp zeigen, dass als top. Räume homöomorphe MR durchaus verschiedene Vervollst. haben können; Vervollst ist also definitiv kein top. Konzept [vgl. auch Bem 4.12]

8.13 THM (Vervollst. M.R) Zu jedem MR gibt es (mind.) eine Vervollständigung. Je zwei Vervollst. sind isometrisch isomorph.

d.h. $\exists$ bijektive Abb φ, die die Metriken respektiert, genauer $(\hat{X},\hat{d})$, $(\tilde{X},\tilde{d})$ 2 Vervollst $\Rightarrow$ $\exists\,\varphi: \hat{X}\to\tilde{X}$ bijektiv und $\tilde{d}(\varphi(\hat{x}),\varphi(\hat{y}))=\hat{d}(\hat{x},\hat{y})$ $\forall \hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$.
[$\Rightarrow \varphi, \varphi^{-1}$ stetig]

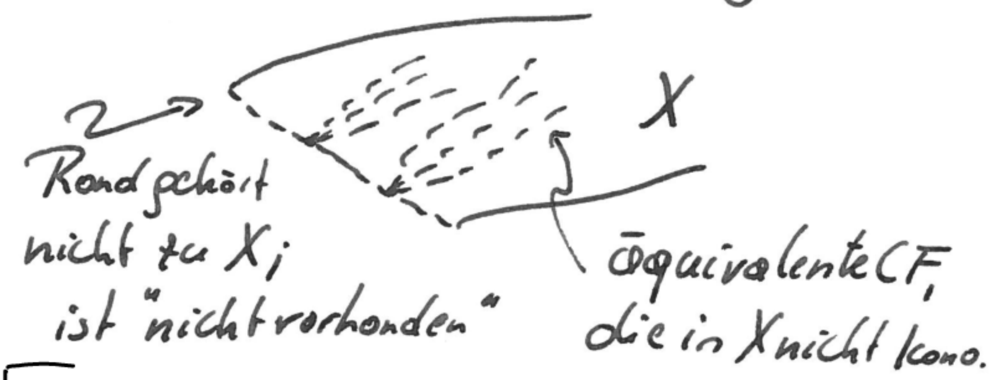
Beweisidee: (Existenz) Sei N die Menge der nicht-konvergenten CF in X. Wir nennen 2 CF in N $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ äquivalent $:\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=0$

"hätten denselben Limes"...

Nun definieren wir $\boxed{\hat{X}:=X\cup N/\sim}$

prospektive Grenzwerte von CF

[graphische Veranschaulichung von $\hat X$]



NICHT VORGETRAGEN

Die Metrik $\hat d$ auf $\hat X$ definieren wir nun gemäß

$$\hat d(x,y) := d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

$$\hat d(\hat x, x) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \quad \forall x \in X \ \forall \hat x = [(x_n)_n] \in N/_\sim$$

$$\hat d(\hat x, \hat y) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad \forall \hat x = [(x_n)_n], \hat y = [(y_n)_n] \in N/_\sim$$

Nun können wir leicht alle Eigenschaften einer Vervollst. für $\hat X$ nachrechnen; einzig trickreicher Punkt ist die Vollst. für $\hat X$: Für CF in $\hat X$ die ganz in X liegen ist alles klar; für eine allg. CF $(\hat x_n)_n$ in $\hat X$ wähle falls $\hat x_n \notin X$ ein CF $(x^n{}_k)_k$ in N mit $[(x^n{}_k)_k] = \hat x_n$ falls $\hat x_n \in X$ setze $(x^n{}_k)_k = x_n \ \forall k$. Dann ist $(x^n{}_{k_n})_n$ für geeignete k_n CF in X; hat also einen Grenzwert $\hat x$ in $\hat X$ und dieser ist auch Grenzwert der ursprünglichen CF $(\hat x_n)_n$.

(Eindeutigkeit) $\forall x \in X$ setze $\varphi(x) = x$

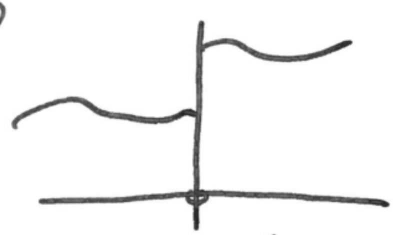
für $\hat{x} = [(x_n)_n] \in N/\sim$ setze $\varphi(\hat{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_n$ ($\exists$ in $\tilde{X}$, da $(x_n)_n$ CF in X)

8.14 MOTIVATION (Vervollständigung von Abb)

Wir stellen uns nun folgender Frage: Sei $f: X \to Y$ (Y M.R.) eine stetige Abb. Können wir f zu $\hat{f}: \hat{X} \to Y$ fortsetzen mit $\hat{f}$ stetig und $\hat{f}|_X = f$?

Die Antwort lautet: i.a. $\boxed{\text{NEIN}}$; es gibt folgende 2 Obstruktionen gegen die Stetigkeit von $\hat{f}$:

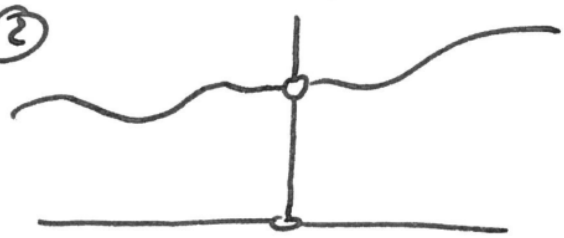
(1)



$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\hat{X} = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$

Sprung an entscheidender Stelle

(2)



$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\hat{X} = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Einzig möglicher Bildpunkt fehlt im Zielraum

Hindernis (2) können wir sicherlich ausschließen, wenn Y vollst. ist; also müssen wir zur Vervollst. $\tilde{Y}$ übergehen.

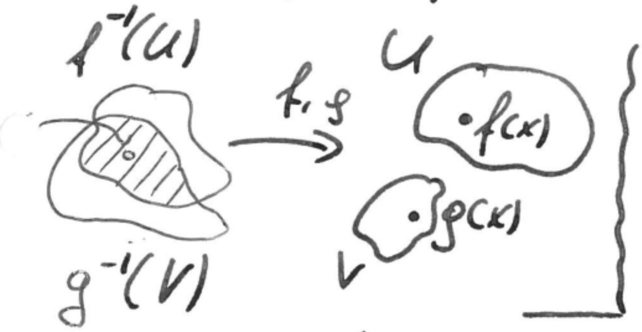
Hindernis (1) können wir vermeiden, wenn wir f als gleichmäßig stetig voraussetzen.

Zunächst stellen wir aber fest, dass wir f auf höchstens eine Art fortsetzen können.

8.15 PROP (Dicht definierte stetige Abb)

Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R., $A \subseteq X$ dicht und $f,g\colon X \to Y$ stetige Abb in einen T_2-Raum. Stimmen f und g auf A überein, dann gilt schon $f=g$.

Beweis: Indir. ang. $\exists x \in X\colon f(x) \neq g(x)$. Dann trenne $f(x)$ und $g(x)$ offen durch U und V. Wegen $U \cap V = \emptyset$ ist



dann auf ganz $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ $f \neq g$. Dies ist aber eine offene Umgebung von x. Widerspruch, da $A \cap \left(f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)\right) \neq \emptyset$ [2.50(i)]. $\square$

8.16 Erinnerung (glm Stetigkeit) = 1.20(ii)

$f\colon X \to Y$ heißt glm stetig $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in X$

$$d(x,y) < \delta \implies d(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

8.17 SATZ (Vervollst. glm stetiger Abb)

Sei $f\colon X \to Y$ eine glm stetige Abb zw M.R. Sind $\hat{X}, \hat{Y}$ Vervollst. von X und Y dann existiert genau eine stetige Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$ von f (d.h. $\hat{f}|_X = f$). $\hat{f}$ ist dann automatisch glm. stetig.

Beweisidee: Für $\hat{x} = \lim x_n$ ($x_n \in N$) setze $\hat{f}(\hat{x}) = \lim_n f(x_n)$.

§ 8.3. Der Banachsche Fixpunktsatz

8.18 Motivation („Existenzmaschinen" in vollst. M.R)

Den Gedankengang in 8.8 aufnehmend wollen wir nun eine der mächtigsten „Existenzmaschinen" der Analysis kennenlernen. Der Banachsche Fixpunktsatz generiert eine Lösung für eine Fixpunktgleichung direkt aus der Vollst des zugrundeliegenden Raumes. Angewendet auf gewöhnliche Differentialgleichungen liefert er ohne große Mühe den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf...

8.19 Def (Kontraktion) Eine Abb $T: X \to X$ heißt **Kontraktion** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, K$ mit $0 < K < 1$ sodass

$$d(Tx, Ty) \leq K\, d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

[$\Rightarrow T$ glm stetig mit $\delta := \varepsilon/K$]

8.20. Thm (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $T: X \to X$ Kontraktion am vollst. MR X.

Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt z [d.h. $Tz = z$] und es gilt

$$z = \lim_n T^n x$$

für jeden beliebigen „Startpunkt" $x \in X$.

25. VO 22.6.

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig; setze $T^1_x := Tx$, $T^n_x := T(T^{n-1}_x)$

$$\Longrightarrow \underline{d(T^{n+1}_x, T^n_x)} \le K\, d(T^n_x, T^{n-1}_x) \le \dots \le \underline{K^n d(Tx, x)}$$

Sei nun $m > n$, dann gilt

26.VI
24.6.

$$d(T^m_x, T^n_x) \le d(T^m_x, T^{m-1}_x) + d(T^{m-1}_x, T^{m-2}_x) + \dots + d(T^{n+1}_x, T^n_x)$$

$$\le \left(K^{m-1} + K^{m-2} + \dots + K^n\right) d(Tx, x)$$

$$\le \left(K^n + K^{n+1} + \dots \right) d(Tx, x)$$

K<1 geom. Reihe

$$= \frac{K^n}{1-K}\, d(Tx, x)$$

Wegen $K^n \to 0$ (Kontraktion!) ist $(T^n_x)_n$ CF.

X vollst $\Longrightarrow \exists\, z := \lim_n T^n_x$.

Für z gilt (T stetig!)

$$\underline{Tz} = T(\lim T^n_x) = \lim_n T^{n+1}_x = \underline{z}$$

also ist z tatsächlich Fixpunkt von T.

Ang $\exists\, u, z$ mit $Tu = u$, $Tz = z$ dann folgt

$$\underline{d(z,u)} = d(Tz, Tu) \le \underline{K\, d(z,u)}$$

und wegen $K < 1 \Rightarrow d(z,u) = 0 \Rightarrow z = u$; also ist z auch eindeutig. $\square$

§ 8.3. Der Satz von Baire

8.21 Motivation (Bairsche Eigenschaft) Wir haben schon wiederholt festgestellt, dass Vollständigkeit keine top. Eigenschaft ist, sondern eine metrische (vgl. 4.12). Dennoch: die Top eines vollst. MR hat eine bedeutende Eigenschaft – die sog. Bairsche Eigenschaft. Diese besagt gewissermassen, dass der Raum "sehr viele Pkte hat" und ist von sehr großer Wichtigkeit für Anwendungen in der Funktionalanalysis [siehe etwa C R p.63-65]. Wie üblich benötigen wir einige neue Begriffe ...

8.22 Def (nirgends dicht; mager) $(X, \mathcal{O})$ t.R. $A \subseteq X$

(i) A heißt <u>nirgends dicht</u> $:\Leftrightarrow \overline{A}^{\circ} = \emptyset$

(ii) A heißt <u>mager</u> $:\Leftrightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ alle A_i nirgends dicht

8.23 Bem (nirgends dicht & mager)

(i) Nirgends dichte (n.d.) Mengen sind topologisch gesehen "klein" bzw "dünn"; ihre Abschlüsse enthalten keine nichtleeren offenen Mengen und keine Umgebungen.

(ii) Endliche Vereinigungen n.d Mengen sind n.d., denn [A, B n.d $O \in \mathcal{O}$ und $O \subseteq \overline{A \cup B} \underset{2.40(iv)}{=} \bar{A} \cup \bar{B}$

$\Rightarrow \underbrace{O \setminus \bar{A}}_{\text{(offen)}} \subseteq \bar{B} \underset{B \text{ n.d}}{\Rightarrow} O \setminus \bar{A} = \emptyset \Rightarrow O \subseteq \bar{A} \underset{A \text{ n.d.}}{\Rightarrow} O = \emptyset$]

$[O \setminus \bar{A} = O \cap \bar{A}^c]$

(iii) Daher sind magere Mengen gewissermassen die „nächst-größeren" Mengen; magere Mengen heißen auch manchmal Mengen von <u>1. Kategorie</u>; nicht-magere Mengen Mengen von <u>2. Kategorie</u>.

<u>8.24 BSP</u> (mager & n.d.)

(i) $\{x\}$ ist n.d. in $\mathbb{R}$; jede Gerade ist n.d in $\mathbb{R}^2$ jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist n.d.

(ii) $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$ ist mager in $\mathbb{R}$; eine abz. Vereinigung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ ist mager.

<u>8.25 BEOBACHTUNG</u> (mager & n.d.)

(i) Teilmengen von $\left\{\begin{matrix}\text{n.d} \\ \text{mageren}\end{matrix}\right\}$ Mengen sind $\left\{\begin{matrix}\text{n.d} \\ \text{mager}\end{matrix}\right\}$.

$$A \text{ n.d.}, B \subseteq A \underset{2.40(iii)}{\overset{2.34(iii)}{\Rightarrow}} \bar{B}^\circ \subseteq \bar{A}^\circ = \emptyset$$

$$A \text{ mager } B \subseteq A \Rightarrow B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{B \cap A_n}_{\text{n.d.}} \Rightarrow B \text{ mager.}$$

(ii) A n.d $\iff \bar{A}^\circ = \emptyset$

$\iff$ keine nichtleere offene Menge paßt in $\bar{A}$ rein

$\iff$ jede nichtleere offene Menge steht über $\bar{A}$ raus

$\iff$ — " — " — " — enthält ext(A)-Punkte

$\iff$ ext(A) ist dicht

2.50(i)

8.26 THM (Satz v. Baire)

In einem vollst. M.R. ist das Innere von mageren Mengen leer.

8.27 BEM (Baire)

(i) 8.26 besagt also, dass in vollst. M.R. nicht nur die nd Mengen klein sind, sondern auch die mageren.

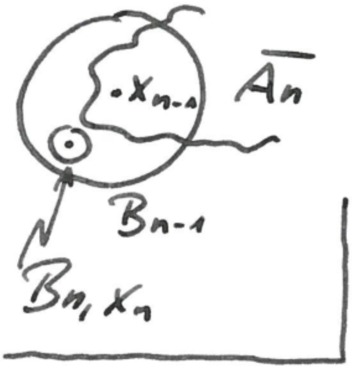
(ii) 8.26 besagt insbesondere, dass ein vollst MR X nicht selbst mager (in sich) sein! ($X \neq \emptyset$ vgl. 1.3)

(iii) Ist X nicht vollst., so kann X sehr wohl mager (in sich) sein, z.B. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$.

Beweis von 8.26: Sei A mager, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n n.d.

Sei $x_1 \in X$ beliebig $r_1 \in \mathbb{R}$ beliebig; wir zeigen, dass $B_{r_1}(x_1) \not\subseteq A$; somit enthält A keine offene Kugel und daher $A^\circ = \emptyset$.

Zu diesem Zweck definieren wir beginnend mit $B_1 = B_{r_1}(x_1)$ induktiv eine Folge von Kugeln $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ mit $B_n = B_{r_n}(x_n)$, $r_n < \frac{1}{n}$ wie folgt:



Sei B_{n-1} gewählt $\overset{A_n \text{ nd}}{\Longrightarrow} \exists x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$; offen!

$$\Longrightarrow \exists r_n < \frac{1}{n}: x_n \in B_{r_n}(x_n) \subseteq \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq B_{n-1} \setminus \overline{A_n} \quad (*)$$

$\Longrightarrow (x_n)_n$ CF, denn für $m \geq n$: $x_m \in B_n \Longrightarrow d(x_m, x_n) < 1/n$

$\overset{X \text{ vollst}}{\Longrightarrow} \exists x = \lim_n x_n$

Außerdem $x_m \in \overline{B_n}$ für $m \geq n \Longrightarrow x = \lim_m x_m \in \overline{B_n}\ \forall n$ und daher

$$\underline{x \in \bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{B_n}} \overset{(*)}{\subseteq} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(B_{n-1} \cap \overline{A_n}^c\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)^c \subseteq \underline{B_1 \setminus A}.$$

Also $\exists x \in B_1 \setminus A \Longrightarrow B_1 \not\subseteq A$ $\square$

8.29. Bem (Bairesche Räume)

Oft findet sich in der Literatur in 8.26 statt

(i) A mager $\Longrightarrow A^\circ = \emptyset$ eine der äquivalenten Bedingungen [o. Beweis]

(ii) A mager $\Longrightarrow A^c$ dicht

(iii) $O \neq \emptyset$ offen $\Longrightarrow O$ nicht mager

(iv) $G_1, \dots$ alle offen + dicht $\Longrightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ dicht.

Räume die eine [$\Leftrightarrow$ jede] der Bedingungen (i)–(iv) erfüllen heissen <u>Bairsche Räume</u>. Nach 8.26 sind also vollst. MR Bairesch; Auch jeder kp T_2 Raum ist Bairesch. [ohne Beweis].