Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Prüfung zu

Grundbegriffe der Topologie

Sommerersemester 2015, Roland Steinbauer

1. Termin, 3.7.2015

1. *Topologische Räume*

   (a) Definiere den Begriff eines topologischen Raumes sowie die Begriffe Basis und Subbasis eines topologischen Raumes. (3 Punkte)

   (b) Auf einer beliebigen nichtleeren Menge ist die kofinite Topologie definiert durch

   $$\mathcal{O}_{\text{CO}} := \{O \subseteq X \mid O^c \text{ ist endlich } \} \cup \{\emptyset\}.$$

   Zeige, dass $\mathcal{O}_{\text{CO}}$ diesen Namen auch verdient, d.h. dass es sich tatsächlich um eine Topologie handelt. (3 Punkte)

   (c) Was bedeutet es für zwei Topologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ auf einer Menge X, dass $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ ist? Sind je 2 Topologien auf X (in diesem Sinne) immer vergleichbar? (2 Punkte)

   (d) Gib eine Basis und eine Subbasis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^2$ an. (2 Punkte)

2. *Inneres, Äußeres, Rand und Abschluss.*
   Sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.

   (a) Definiere, was man unter dem Inneren, dem Äußeren, dem Rand und dem Abschluss von A versteht. Fertige eine Skizze an. (4 Punkte)

   (b) Gib Inneres, Äußeres, Rand und Abschluss der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie an: $A_1 = [a, b)$, $A_2 = \mathbb{Q}$ (2 Punkte)

   (c) Wie lässt sich die Tatsache $x \in \overline{A}$ mittels Umgebungen von x ausdrücken? Was ist ein Häufungspunkt der Menge A? (2 Punkte)

   (d) Die Menge A' der Häufungspunkte von A kann in A enthalten sein, muss aber nicht. Illustriere an zwei einfachen Beispielen von Teilmengen von $\mathbb{R}$, dass tatsächlich beide Möglichkeiten auftreten können. (2 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Vermischtes*

   (a) *T_2 und die Eindeutigkeit von Grenzwerten.* Formuliere das Hausdorffsche Trennungsaxiom T_2 und zeige, dass T_2 gilt, falls die Grenzwerte von Netzen eindeutig bestimmt sind. (4 Punkte)

   (b) *Kompaktheit.* Definiere den Begriff eines kompakten topologischen Raums und zeige, dass stetige Bilder kompakter Räume wieder kompakt sind. (3 Punkte)

   (c) *Fixpunktsatz von Banach.* Erkläre den Begriff einer Kontraktion auf einem metrischen Raum und formuliere den Fixpunktsatz von Banach. (3 Punkte).

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib ein (möglichst explizites und einfaches) Gegenbeispiel an oder argumentiere für oder gegen die Richtigkeit der Aussage. (je 2 Punkte)

   (a) Kompakte Mengen sind abgeschlossen.

   (b) Jeder metrische Raum ist AA1.

   (c) Jede Verfeinerung einer Folge in einem topologischen Raum ist wieder eine Folge.

   (d) Stetige Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

   (e) Jede mindestens zweipunktige Menge mit der diskreten Topologie ist *nicht* zusammenhängend.

Prüfungsausarbeitung
$\boxed{1}$ TERMIN

$\boxed{1}$ (a) Ein top. Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X, d.h. einem Teilsystem $\mathcal{O}$ der Potenzmenge 2^X von X mit den 3 Eigenschaften

(O1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$

(O2) $O_i \in \mathcal{O} \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

(O3) $O_i \in \mathcal{O} \ 1 \le i \le n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$

Ein Teilsystem $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$ falls jedes $O \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Ein Teilsystem $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}$ heißt Subbasis von $\mathcal{O}$, falls die Familie der endlichen Durchschnitte $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ $(S_i \in \mathcal{S})$ Basis von $\mathcal{O}$ ist.

(b) $\mathcal{O}_{co} = \{O \subseteq X \mid O^c \text{ endl.}\} \cup \{\emptyset\}$ ist Top auf X, denn es gelten (O1) - (O3)

(O1) klar [$\emptyset \in \mathcal{O}_{co}$ per def; $X^c = \emptyset$ endlich]

(O2) $O_i \in \mathcal{O}_{co}$ oBdA alle $O_i \neq \emptyset$ ($O_i = \emptyset$ können weggelassen werden; alle $O_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup O_i = \emptyset \in \mathcal{O}_{co}$)

$\Rightarrow O_i^c$ endlich $\Rightarrow \bigcap O_i^c$ endlich

$\Rightarrow (\bigcup O_i)^c$ endl. $\Rightarrow \bigcup O_i \in \mathcal{O}_{co}$

(O3) $O_i \in \mathcal{O}_{co}$ oBdA alle $O_i \neq \emptyset$ (sonst $\bigcap O_i = \emptyset \in \mathcal{O}_{co}$)

$\Rightarrow O_i^c$ endl. $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} O_i^c$ endl.

$\Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{n} O_i)^c$ endl. $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}_{co}$

(c) Θ_1 heißt feiner als Θ_2, $\Theta_1 \geq \Theta_2$, falls $\Theta_2 \subseteq \Theta_1$.

Nein siehe etwa Tops auf einer Menge mit mind. 2 Elementen $\{a, b\}$

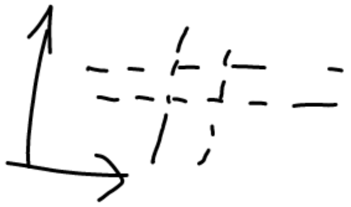
$\Theta_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$

$\Theta_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}$. $\rightarrow \Theta_1 \not\geq \Theta_2, \Theta_2 \not\geq \Theta_1$

(d) $\mathcal{B} = \{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a<b, c<d\}$ ... offene Rechtecke

$\mathcal{S} = \{(a,b)\times\mathbb{R} \mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\} \cup \{\mathbb{R}\times(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$

offene Streifen

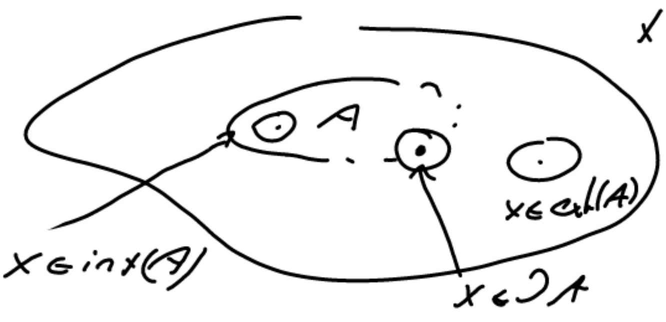


|2| (a) $\operatorname{int} A \equiv A^\circ = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A\}$

$\operatorname{ext} A \equiv \{x\in X \mid \exists U\in\mathcal{U}_x : U \subseteq A^c\}$

$\partial A = \{x\in X \mid \forall U\in\mathcal{U}_x : U\cap A \neq \emptyset \neq U\cap A^c\}$

$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$



(b) $A_1^\circ = (a,b)$

$\operatorname{ext}(A_1) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

$\partial A_1 = \{a\} \cup \{b\}$

$\overline{A_1} = [a,b]$;

$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\operatorname{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

2 (c) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$

x HP von $A \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_x : U - \{x\} \cap A \neq \emptyset$

(d) $A = (0,1) \Rightarrow A' = [0,1] \Rightarrow A' \not\subseteq A$

$B = [0,1] \Rightarrow B' = [0,1] \Rightarrow B' \subseteq B$

3 (a) $T_2 :\Leftrightarrow \forall x \neq y \in X \; \exists U, V \in \mathcal{O} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$

zz: $\left(\begin{array}{l} \forall (a_\lambda)_\lambda \text{ in } X, \forall x, y \in X \text{ mit} \\ a_\lambda \to x, \; a_\lambda \to y \Rightarrow x = y \end{array} \right) \Rightarrow T_2$

Ang nicht, dh $\exists x \neq y$ aber $\forall U \in \mathcal{U}_x \; \forall V \in \mathcal{U}_y : U \cap V \neq \emptyset$

Seien $\mathcal{V}_x, \mathcal{V}_y$ U-Basen bei x bzw. y. Definiere

$$\Lambda = \{(U, V) \mid U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\},$$

$$(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2, \; V_1 \supseteq V_2$$

Dann ist Λ gerichtete Menge: (R), (T), (A) sind klar

(NoT) ist gerade (UB2) $[\forall U, U' \in \mathcal{V}_x \Rightarrow \exists U'' \subseteq U' \cap U]$

Nun wähle für $(U, V) \in \Lambda$ ein $z \in U \cap V$ $[U \cap V \neq \emptyset]$

und definiere das Netz $x_{(U,V)} = z$.

Dann gilt $x_{(U,V)} \to x$ und $x_{(U,V)} \to y$ $\lightning$!]

(b) $(X, \mathcal{O})$ heißt <u>kompakt</u>, falls jede offene Überdeckung von X eine endl. Teilüberdeckung hat.

$\boxed{3}$ (b) Fortsetzung

zz: $f: X \to Y$ stetig, X kp $\Rightarrow f(X) \subseteq Y$ kp

Sei $(O_i)_{i\in I}$ offene ÜD von $f(X) \Rightarrow (f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ offene ÜD von X

$f^{-1}(O_i)$ offen $\forall i \in I$ und $X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\bigcup O_i) = \bigcup f^{-1}(O_i)$

$\overset{X\text{ kp}}{\Longrightarrow} \exists i_1, \dots, i_n: X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})$

$\Rightarrow f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(O_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$ $\square$

(c) $T: (M,d) \to (M,d)$ heißt <u>Kontraktion</u>, falls $\exists\, 0 < K < 1$ sodass $\forall x,y \in M$

$$d(Tx, Ty) \leq K\, d(x,y).$$

<u>Banachscher Fixpunktsatz.</u>

Sei (M,d) ein <u>vollständiger</u> metrischer Raum und $T: M \to M$ eine Kontraktion.

Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h. $Tz = z$.

Außerdem gilt

$$z = \lim_{n\to\infty} T^n x$$

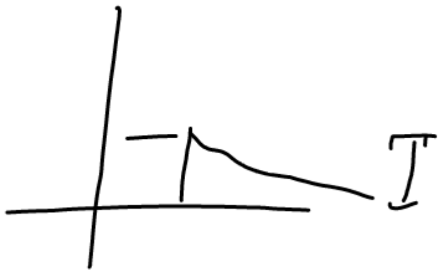
für jeden beliebigen Startwert $x \in M$.

14 (a) <u>nein</u>, denn in $\mathcal{O}_{ke}$ sind endliche Mengen kp aber nicht abg

(b) Ja, wähle für $x \in M$ die metrischen Bälle $B_{\frac{1}{k}}(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ als Umgebungsbasis

(c) Nein, sei $(x_n)_n$ eine Folge auf $\mathbb{R}$, dann ist $y_k := x_{\lfloor k \rfloor}$ $(k \in [1,\infty)$, $\lfloor\ \rfloor$ nächst kleinere ganze Zahl) eine Verfeinerung und ein Netz auf der ger. Menge $K = [1,\infty)$ aber keine Folge mehr (K überabzählbar).

(d) <u>Nein</u>: $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$



$$f(\underbrace{[1,\infty)}_{\text{abg} \subseteq \mathbb{R}}) = (0,1] \text{ nicht abg.}$$

(e) Ja, denn sei $X = \{a,b\}$ mit $\mathcal{O}_{dis}$. Dann gilt $\{a\},\{b\}$ sind offen, disjunkt und ihre Vereinigung ergibt X.
Also ist $\{a\}, \{b\}$ eine Dijunktion und X <u>nicht</u> zsh.