Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Prüfung zu

Grundbegriffe der Topologie

Sommerersemester 2015, Roland Steinbauer

2. Termin, 30.9.2015

1. *(Sub-)Basen topologischer Räume.* topologischer Raum.
   (a) Definiere den Begriff Basis und Subbasis einer Topologie. (2 Punkte)
   (b) Gib explizit eine Basis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^3$, sowie den diskreten topologischen Raum an. (2 Punkte)
   (c) Zeige folgende Charakterisierung von Basen für $\mathcal{O}$: (2 Punkte)
   $$\mathcal{B} \text{ ist Basis für } \mathcal{O} \ \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{O}\ \forall x \in O\ \exists B_x \in \mathcal{B}:\ x \in B_x \subseteq O$$
   (d) Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle Mengen S aus einer(!) Subbasis $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}_Y$ gilt, dass $f^{-1}(S)$ offen in X ist. (4 Punkte)

2. *Zusammenhang.*
   (a) Definiere die Begriffe Disjunktion und zsammenhängender topologischer Raum. (2 Punkte)
   (b) In zusammenhängenden topologischen Räumen kann in typischer Weise von lokalen Eigenschaften auf globale Eigenschaften geschlossen werden. Formuliere und Beweise das entsprechende „Theorem” aus der Vorlesung. (5 Punkte)
   (c) Diskutiere den Zwischenwertsatz der Analysis im Kontext zusammenhängender topologischer Räume. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Verschiedenes*

   (a) *Spurtopologie als initiale Topologie.* Wie ist die Spurtopologie auf einer Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ definiert? Die Spurtopologie kann auch als initiale Topologie aufgefasst werden. Wie? (4 Punkte)

   (b) *Homöomorphismen.* Was versteht man unter einem Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen? Worin liegt die große Bedeutung von Homöomorphismen? (3 Punkte)

   (c) *Kompaktheit.* Zeige, dass kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums abgeschlossen sind. (3 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib ein (möglichst explizites und einfaches) Gegenbeispiel an oder argumentiere für oder gegen die Richtigkeit der Aussage. (je 2 Punkte)

   (a) Sind alle Singletons (d.h. die einpunktigen Mengen) $\{x\}$ im topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ abgeschlossen, dann ist $\mathcal{O}$ die diskrete Topologie.

   (b) Stetige Urbilder kompakter Mengen sind kompakt.

   (c) Umgebungen sind immer offen.

   (d) Jeder AA2-Raum ist auch schon separabel.

   (e) Vollständigkeit ist eine topologische Eigenschaft (d.h. eine Eigenschaft, die unter Homöomorphismen topologischer Räume erhalten bleibt).

Prüfungsausarbeitung

2. Termin

[1] (a) Eine Basis einer Top $\mathcal{O}$ ist ein Teilsystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$, sodass jedes $O \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von $\mathcal{B}$-Mengen geschrieben werden kann.

Eine Subbasis einer Top $\mathcal{O}$ ist ein Teilsystem $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, sodass die Familie der endl. Durchschnitte von $\mathcal{S}$-Mengen $\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \,;\, S_i \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\right)$ Basis von $\mathcal{O}$ ist.

(b) Eine Basis für die übl. Top auf $\mathbb{R}^3$ sind etwa die offenen r-Bälle $\{B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^3 / \|x - x_0\| < r\}, r > 0, x_0 \in \mathbb{R}^3\}$

Eine Basis für $\mathcal{O}_{dis}$ ist die Familie $\{\{x\} / x \in X\}$.

(c) $\Rightarrow$ $O = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{B}),\ x \in O$

$\Rightarrow \exists i_0 : x \in B_{i_0} =: B_x \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = O$

$\Leftarrow$ $O = \bigcup_{x \in O} B_x$ oder $O = \emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i$

(d) f stetig, $S \in \mathcal{S}$ $[\Rightarrow S \in \mathcal{O}_y] \Rightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{O}_X$

und umgekehrt:

Sei $O \in \mathcal{O}_y \Rightarrow O = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ für $S_{ij} \in \mathcal{S}$

$\Rightarrow f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} \underbrace{f^{-1}(S_{ij})}_{\in \mathcal{O}_X \text{ lt. Voraus}}$ offen nach (O2), (O3)

2 (a) Eine <u>Disjunktion</u> eines TR $(X,\mathcal{O})$ ist ein Paar nichtleerer, disjunkter, offener TM G_1, G_2 mit $X = G_1 \cup G_2$.
$(X,\mathcal{O})$ heißt <u>zusammenhängend</u>, falls X <u>keine</u> Disjunktion besitzt.

(b) „THM:" Sei (E) eine Eigenschaft die Pkte x im TR $(X,\mathcal{O})$ haben können oder nicht und es gelte

(1) $\exists x \in X$ mit (E).

(2) Hat x (E), dann auch jeder y in einer Umgebung von x.

(3) — " — nicht — " hat — " ——— .

Falls X zsh $\Rightarrow \forall x \in X$: x hat (E)

<u>Beweis</u>: Seien $G_1 := \{x \in X \mid x \text{ hat (E)}\}$, $G_2 := \{x \in X \mid x \text{ hat (E) nicht}\}$

(2), (3) $\Rightarrow G_1, G_2 \in \mathcal{O}$, G_1, G_2 disjunkt per def. und $X = G_1 \cup G_2$; X zsh $\Rightarrow \nexists$ Disjunktion, $G_1 \neq \emptyset$ (wegen (1)) $\Rightarrow G_2 = \emptyset$ □

(c) Der ZWS ergibt sich aus dem folgenden Satz:
Stetige Bilder zsh Räume sind zsh.
Da alle (mind 2-pktigen) zsh Teilmengen von $\mathbb{R}$ (mit $\mathcal{O}_n$) Intervalle sind folgt

$f: (X,\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ stetig, X zsh $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ und alle t mit: $f(x_1) < t < f(x_2)$ $\exists x \in X$: $f(x) = t$

Falls $(X,\mathcal{O})$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, dann ergibt sich der ZWS der Analysis 1.

[3] (a) $(X,\mathcal{O})$ t.R, $Y \subseteq X$. Die Spurtop $\mathcal{O}_Y$ auf Y ist definiert als $\mathcal{O}_Y := \{Y \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$

Sei $f: Y \to (X, \tilde{\mathcal{O}})$ gegeben. Die initiale Top auf Y bzgl. f ist definiert als $\mathcal{O}_f = \{f^{-1}(G) \mid G \in \tilde{\mathcal{O}}\}$

Sei also $Y \subseteq X$, $(X,\mathcal{O})$ t.R und $i: Y \hookrightarrow X$, $y \mapsto y$ die kanonische Einbettung von Y in X. Dann ist die Spurtop $\mathcal{O}_Y$ genau die initiale Top $\mathcal{O}_i$ auf Y bzgl. i:

$\forall A \subseteq X: i^{-1}(A) = A \cap Y$, denn $x \in i^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in Y$ und $i(x) = x \in A$

und daher

$$\mathcal{O}_Y = \{Y \cap O \mid O \in \mathcal{O}\} = \{i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O}_i$$

(b) Eine stetige Abb $f: (X,\mathcal{O}) \to (Y, \tilde{\mathcal{O}})$ heißt Homöo. falls f bijektiv und f^{-1} stetig sind.

[Stetigkeit von f^{-1} ist nicht automatisch gegeben]

Damit gilt: $O \in \mathcal{O} \Leftrightarrow f(O) \in \tilde{\mathcal{O}}$ (und dasselbe für abg.)

und daher sind homöomorphe t.R vom Standpunkt der Top „gleich". Ja man definiert eine Eigenschaft als „topologisch", falls sie unter Homöos erhalten bleibt. Homöomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf allen t.R.

[3] (c) zz: X T_2, $A \subseteq X$ kp $\Rightarrow A$ abg

Zeige A^c ist offen. Sei $y \in A^c \Rightarrow \forall x \neq y \in A \ \exists U_x, V_y$ offen:

$x \in U_x,\ y \in V_y,\ U_x \cap V_y = \emptyset$

$$A \subseteq \bigcup_x U_x \overset{kp}{\Longrightarrow} A \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{x_k} =: U$$

$\Rightarrow y \in V := \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$ und V ist offene Umgeb. von y

Schließlich:

$$y \in V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^n U_{x_k}^c = \Big(\bigcup_{k=1}^n U_{x_k}\Big)^c \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}_y \ \square$$

[4] (a) Nein: $\{x\}$ abg $\forall x \not\Rightarrow \bigcup_{x \in A} \{x\} = A$ abg

[Außerdem wäre sonst jeder T_1-Raum diskret]

(b) Nein: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konstante Abb [d.h. $f(x) = c$ $\forall x$]

$\Rightarrow f^{-1}(\{c\}) = \mathbb{R}$ nicht kp

(c) Nein: $\overline{B_\varepsilon(x)} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ ist nicht offen und Umgebung von $x \in \mathbb{R}^2$, da $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq \overline{B_\varepsilon(x)}$.

(d) Ja: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ abz. Basis, dann ist $\{x_k \mid x_k \in B_k$ beliebig$\}$ abz & dicht.

(e) Nein: Zunächst ist Vollständigkeit nur für MR definiert und dort nicht unter Homöos invariant: Gegenbsp $f: [0,\infty) \to [0,1),\ x \mapsto x/1+x$