Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Prüfung zu

Grundbegriffe der Topologie

Sommerersemester 2015, Roland Steinbauer

3. Termin, 18.12.2015

1. *Umgebungssysteme und -basen*

   (a) Definiere die Begriffe Umgebung, Umgebungssystem und Umgebungsbasis für einen Punkt x im topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$. (2 Punkte)

   (b) Zeige, dass die Durchschnitte zweier Umgebungen sowie die Obermengen von Umgebungen wieder Umgebungen sind. (2 Punkte)

   (c) Gib eine Umgebungsbasis für $x \in \mathbb{R}^2$ mit der natürlichen Topologie an, die aus abzählbar vielen, abgeschlossenen Mengen besteht. (1 Punkt)

   (d) Formuliere das 1. Abzählbarkeitsaxiom (AA1) und zeige, dass jeder topologische Raum, dessen Topologie von einer Metrik induziert wird AA1 ist. (2 Punkte)

   (e) Formuliere und beweise die Grundeigenschaft (U4) für Umgebungssysteme. Diskutiere inwiefern sie einen Ersatz für die Dreiecksungleichung in metrischen Räumen darstellt. (3 Punkte)

2. *Kompaktheit*

   (a) Definiere den Begriff eines kompakten topologischen Raumes und formuliere den Satz von Tychonoff. (2 Punkte).

   (b) In kompakten topologischen Räumen kann in spezifischer Weise von lokalen auf globale Eigenschaften geschlossen werden. Formuliere ein entsprechendes Theorem und beweise es. (5 Punkte)

   (c) Diskutiere Kompaktheit im Kontext der Analysis; Stichwort: Heine-Borel. (3 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Vermischtes.*

   (a) *Dicht definierte stetige Abbildungen.* Beweise: Seien f, g stetige Abbildungen von einem topologischen Raum in einen Hausdorff Raum. Stimmen f und g auf einer dichten Teilmenge überein, dann sind sie gleich. (3 Punkte)

   (b) *Inneres, Äußeres, Rand.* Sei $A \subseteq X$ und $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. Definiere $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$ und ∂A und zeige, dass diese drei Mengen eine Partition von X bilden. (3 Punkte)

   (c) *Niemytzki-Raum.* Definiere die Niemytzki-Topologie auf der (abgeschlossenen) oberen Halbebene durch Angabe geeigneter Umgebungsbasen.

   Konvergieren die Folgen $y_n := (0, \frac{1}{n})$ und $x_n := (\frac{1}{n}, 0)$ „von oben" bzw. „von rechts" in der Niemytzki-Topologie gegen den Ursprung? Begründe beide Antworten. (4 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib ein (möglichst explizites und einfaches) Gegenbeispiel an oder argumentiere für oder gegen die Richtigkeit der Aussage. (je 2 Punkte)

   (a) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$, dann kann $\mathcal{B}$ auch abgeschlossene Mengen enthalten.

   (b) Jedes beliebige Teilsystem der Potenzmenge 2^X der Menge X definiert als Subbasis eindeutig eine Topologie auf X.

   (c) Separable metrische Räume sind AA2.

   (d) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann sind X und $\emptyset$ die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen.

   (e) Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen X, Y kann zu einer stetigen Abbildung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ zwischen den Vervollständigungen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ von X bzw. Y fortgesetzt werden.

Prüfungsausarbeitung 3. Termin 2015-12-14

[1] (a) U heißt <u>Umgebung</u> von x, falls $\exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U$

Das <u>Umgebungssystem</u> $\mathcal{U}_x$ bei x ist die Familie aller Umgebungen von x, d.h. $\mathcal{U}_x := \{V\subseteq X \mid V \text{ ist Umg. von } x\}$

Ein Teilsystem $\mathcal{W}_x$ von $\mathcal{U}_x$ heißt <u>Umgebungsbasis</u>, falls $\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists V\in\mathcal{W}_x: (x\in)\, V\subseteq U$

(b) $U_1, U_2\in\mathcal{U}_x \Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{U}_x$, denn:

$\exists O_1, O_2\in\mathcal{O}$ mit $x\in O_1\subseteq U_1$, $x\in O_2\subseteq U_2$

$\Longrightarrow x\in \underbrace{O_1\cap O_2}_{\in\mathcal{O} \text{ wegen (O3)}} \subseteq U_1\cap U_2$

$U\in\mathcal{U}_x$, $V\supseteq U \Rightarrow V\in\mathcal{U}_x$ ist trivial, denn $\exists O\in\mathcal{O}: x\in O\subseteq U\subseteq V$

(c) $\overline{B_{\frac{1}{n}}}(x) = \{y\in\mathbb{R}^2 \mid \|x-y\|\le 1/n\}$

(d) Ein tR erfüllt (AA1), falls jeder Pkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

Jeder tR Raum, dessen Top von einer Metrik induziert ist, erfüllt AA1, denn wähle für $x\in X$ als abz. Umgebungsbasis $\mathcal{W}_x = \{B_{1/n}(x) \mid n\in\mathbb{N}\}$ mit $B_{1/n}(x) = \{y\in X \mid d(x,y) < 1/n\}$.

(e) (U4) $\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists V\in\mathcal{U}_x: V\subseteq U \wedge \forall y\in V: U\in\mathcal{U}_y$

Beweis: $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}: x \in O \subseteq U$; setze $V := O$

$\Longrightarrow V \in \mathcal{U}_y \; \forall y \in V$ da offen

$\overset{(b)}{\Longrightarrow} U \supseteq V$ ist ebenfalls Umgebung von y

Die analoge Aussage zu (U3) in MR, nämlich

Sei $U = B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow \forall x' \in B_{\varepsilon'}(x) = V \; \exists \delta:$

$B_\delta(x') \subseteq B_\varepsilon(x)$ [also $B_\varepsilon(x) = U$ ist Umgebung $\forall$ $x' \in V = B_{\varepsilon'}(x)$]

beweist man mittels Δ-Ungl:

wähle $\delta = (\varepsilon - \varepsilon')/2$ (>0!) $\Rightarrow \forall y' \in B_\delta(x')$

$d(y', x) \leq d(y', x') + d(x', x) < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} + \varepsilon' < \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} < \varepsilon$.

$\boxed{12}$ Ein tR X heißt <u>kp</u>, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

<u>Satz (Tychonov)</u>: Beliebige Produkte top Räume sind genau dann kp, wenn jeder Faktor kp ist.

Dh: $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ t.R.

$$X = \prod_{i \in I} X_i \text{ kp} \iff X_i \text{ kp } \forall i \in I$$

(b) „THM:" Sei (E) eine Eigenschaft, die offene Mengen im tR $(X, \mathcal{O})$ zugeschrieben werden kann und die sich auf Vereinigungen vererbt (d.h. U, V haben (E) $\Rightarrow U \cup V$ hat (E)). Gilt (E) lokal (dh $\forall x \in X: \exists U$ offene Umgebung von x mit (E)) und ist X kp, dann hat X (E).

Beweis: $\forall x \in X \;\exists U_x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}_x : U_x$ hat (E).

- Wegen $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, X kp $\Rightarrow X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Da (E) stabil unter endl. Vereinigungen ist (Voraussetzung iterativ anwenden) hat $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ (E) und somit auch X. $\square$

(c) Im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz v. Heine Borel:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kp $\Longleftrightarrow$ abg + beschr

Diese Aussage hat in allg. t.R. keinen Sinn ($A \subseteq X$ beschr. kann nicht definiert werden). Dort wo sie einen Sinn ergibt (z.B. TNR), ist sie i.a. falsch.
Tatsächlich gilt in TNR: A kp $\Rightarrow$ abg + beschr.
$\not\Leftarrow$ schon in ∞-dim NVR, z.B. ℓ^2, dessen Einheitskugel nicht kp ist.

3 (a) $f, g : X \to Y$ stetig, Y T_2, $A \subseteq X$ dicht, $f|_A = g|_A$
$\Longrightarrow f = g$

Beweis: Indir. ang. $\exists x \in X$: $f(x) \neq g(x) \xRightarrow{Y\, T_2}$ trenne $f(x)$ und $f(x)$ durch offene disj. Mengen U, V

$\xRightarrow{U \cap V = \emptyset} f \neq g$ auf $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

Aber $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ ist offene Umgebung von x und enthält daher ein φ aus der dichten Menge A. $\lightning$ $\square$

(b) $\operatorname{int}(A) \equiv A^\circ := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A\}$

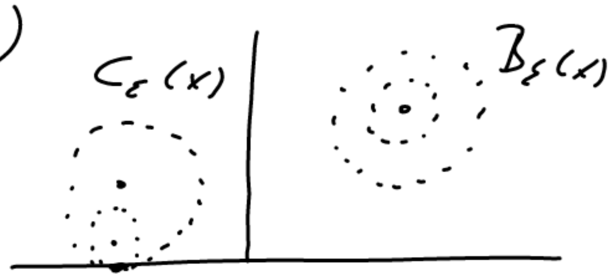
$\operatorname{ext}(A) := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A^c\}$

$\partial A := \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap A^c\}$

Diese 3 Mengen sind offensichtlich disjunkt und ihre Vereinigung ergibt genau X, d.h. sie bilden eine Partition.

$\boxed{3}$ (c) Auf $X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$ definieren wir eine Topologie durch Vorgabe einer Umgebungsbasis $\mathcal{W}_x$ für jeden Pkt $x = (x_1, x_2) \in X$:

Falls $x_2 > 0$ sei $\mathcal{W}_x = \{B_\varepsilon(x) \mid 0 < \varepsilon \leq x_2\}$,
falls $x_2 = 0$ sei $\mathcal{W}_x = \{C_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0\}$, wobei
$C_\varepsilon(x) = \{y = (y_1, y_2) \in X \mid \|y - m\|_2 < \varepsilon\} \cup \{x\}$,
mit $m = (y_1, \varepsilon)$



$y_n = (0, 1/n) \to (0,0)$
denn $1/n$ ist schließlich in jedem $C_\varepsilon(0)$

$x_n = (1/n, 0) \not\to (0,0)$ da $x_n \notin C_\varepsilon(0)$ für alle ε;
der einzige Pkt der Form $(x_1, 0) \in C_\varepsilon(0)$ ist genau 0.

$\boxed{4}$ (a) JA, z.B. $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ für Dis (b) JA, Subbasen haben keine Grundeigenschaft.

(c) JA, sei $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq X$ abz. & dicht,
dann ist $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(y_k) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ abz. Basis der Top.

(d) Nein, das ist nur in zsh + $\mathbb{R}$ so; Gegenbsp
$X = (0,1) \cup (1,2)$ mit der Spurtop von $\mathbb{R}$ denn
$(0,1)$ und $(1,2)$ sind beide offen & abg.

(e) Nein, dazu muss f glm. stetig sein; Gegenbsp
„Sprung an entscheidender Stelle“