Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$/40

Note:

Prüfung zu

Grundbegriffe der Topologie

Sommerersemester 2015, Roland Steinbauer

4. Termin, 1.4.2015

1. *Konstruktion topologischer Räume*

   (a) *Produkt- und Boxtopologie.* Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ eine beliebige Familie topologischer Räume. Wie sind die Produkttopologie und die Boxtopologie auf $X := \Pi_{i\in I} X_i$ definiert ? (2 Punkte)

   (b) *Initiale Topologie.* Sei X eine Menge und $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $f_i : X \to X_i$ eine Familie von Abbildungen. Wie ist die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i und $(X_i, \mathcal{O}_i)$ definiert? Was hat diese mit der Stetigkeit der f_i zu tun? (2 Punkte)

   (c) *Produkttopologie als initiale Topologie.* Wie kann die Produkttopologie auf X als initiale Topologie aufgefasst werden? (3 Punkte)

   (d) *Produkttopologie vs. Boxtopologie.* Begründe warum die Produkttopologie die „richtige" Topologie auf dem Produkt $X := \Pi_{i\in I} X_i$ ist. Zitiere (genau) das entsprechende Resultat aus der Vorlesung. (3 Punkte)

2. *Konvergenz*

   (a) Definiere die Begriffe Netz und Konvergenz von Netzen in topologischen Räumen. (2 Punkte)

   (b) Die Abgeschlossenheit einer Menge A im topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ kann mittels konvergenter Netze charakterisiert werden. Formuliere das einschlägige Resultat exakt und beweise es. (4 Punkte)

   (c) Beweise: Besitzt ein Netz in einem topologischen Raum einen Häufungswert x, dann besitzt es eine gegen x konvergente Verfeinerung. (4 Punkte)

Bitte umblättern!

3. *Vermischtes*

   (a) *Kompaktheit.* In kompakten topologischen Räumen kann in vielen Situationen von lokalen auf globale Eigenschaften geschlossen werden. Erkläre die einschlägige Vorgehensweise und gib ein Beispiel. (5 Punkte)

   (b) *Topologie via (Sub)-Basen.* Beschreibe den Zugang zur Definition einer Topologie via der Vorgabe einer Basis (ohne Beweise). Vergleiche diesen Zugang mit dem Zugang über Subbasen; was ist der große technische Vorteil bei letzterem? (5 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib ein (möglichst explizites und einfaches) Gegenbeispiel an oder argumentiere für oder gegen die Richtigkeit der Aussage. (je 2 Punkte)

   (a) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis einer Topologie $\mathcal{O}$, dann kann $\mathcal{B}$ auch nicht offene Mengen enthalten.

   (b) Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ zusammenhängend, so sind X und $\emptyset$ die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen von X.

   (c) Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum und sei $A \subseteq X$. Ist A abgeschlossen, so ist A auch schon kompakt.

   (d) Ein topologischer Raum mit der Klumpentopologie ist nicht T_2.

   (e) Das Umgebungssystem eines Punktes x in einem topologischen Raum ist auch eine Umgebungsbasis von x.

Prüfungsausarbeitung

4. Termin

$\boxed{1}$ (a) Die Produkttop ist die von der Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ S = \prod_{i\in I} Y_i \;\middle|\; Y_i = X_i \text{ für alle bis auf ein } i_0 \in I,\ Y_{i_0} \in \mathcal{O}_{i_0} \text{ beliebig} \right\}$$

erzeugte Top. Die Boxtop ist die von der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod Y_i \;\middle|\; Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig} \right\}$$

erzeugte Top.

(b)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & X_i \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Die initiale Top auf X ist definiert als die durch die Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ f_i^{-1}(O_i) \;\middle|\; i \in I,\ O_i \in \mathcal{O}_i \right\}$$

erzeugte Top. Sie ist (offensichtlich) die gröbste Top, für die alle f_i stetig sind.

(c) Die Produkttop ist die initiale Top auf X bzgl der Projektionen

$$p_j : X = \prod_{i\in I} X_i \ni x = (x_i)_{i\in I} \longmapsto x_j \in X_j .$$

Denn nach (b) ist diese initiale Top erzeugt von der Subbasis

$$\mathcal{S} = \left\{ p_j^{-1}(O_j) \;\middle|\; j \in I,\ O_j \in \mathcal{O}_j \right\}.$$

Es gilt aber

$$p_j^{-1}(O_j) = \left\{ x = (x_i)_i \in X \;\middle|\; x_j \in O_j \right\} = \prod_{i\neq j} X_i \times O_j$$

also sind die Subbasismengen nach (a) genau jene der Produkttop.

(d) Die Produkttop ist genau die Top der koordinatenweisen Konvergenz, d.h. auf $X = \prod_i X_i$ mit der Produkttop gilt für Netze $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

$$x_\lambda \to x \iff \forall k \in I:\ p_k(x_\lambda) \longrightarrow p_k(x) \text{ in } (X_k, \mathcal{O}_k)$$

Außerdem ist die Boxtopologie im Falle unendlicher Produkte ($|I| \neq k\ \forall k \in \mathbb{N}$) zu fein, denn sei $x = (x, x, \dots) \in X$ eine konstante Folge, dann gilt in der Boxtop $\frac{1}{n} x \not\to 0$.

$\boxed{\hookrightarrow |I| < \infty \implies \mathcal{O}_{Box} = \mathcal{O}_{Prod}}$

$\boxed{2}$ (a) Ein Netz auf dem TR $(X, \mathcal{O})$ ist eine Abb $x: \Lambda \to X$, wobei Λ eine gerichtete Menge ist.

Ein Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in X konvergiert gegen $x \in X$, falls $\forall U$ Umgebung von x $\exists \lambda_0 \in \Lambda\ \forall \lambda \geq \lambda_0 : x_\lambda \in U$.
Der Pkt x heißt dann ein Grenzwert von $(x_\lambda)_\lambda$; dieser muß nicht eindeutig sein!

(b) Sei $A \subseteq (X, \mathcal{O})$, dann gilt

$$A \text{ abg} \iff \forall \text{ Netze } (x_\lambda) \text{ in } A \text{ mit } x_\lambda \to x \overset{\text{in } X}{} \implies x \in A$$

Beweis "$\Rightarrow$" Sei (x_λ) in A mit $x_\lambda \to x$. Indir ang $x \notin A$
$\implies A^c$ offene Umgebung von x mit der Eig, dass $x_\lambda \notin A^c\ \forall \lambda \implies x_\lambda \not\to x$ Wid

„$\Leftarrow$" Indir. ang. A nicht abg. $\Rightarrow \exists x \in \bar{A} \setminus A$

Sei $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis von $x \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x: V \cap A \neq \emptyset$

Insbes. $\exists x_V \in A \cap V$.

$\mathcal{V}_x$ ist gerichtete Menge und $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_x}$ daher ein Netz in A mit $x_V \to x \Rightarrow x \in A$; Wid.

$\square$

(c) Sei x HW des Netzes $(x_\lambda) \Rightarrow \exists$ Verfeinerung $(y_\mu)_\mu$ mit $y_\mu \to x$

Bew.: Sei $\mathcal{V}_x$ Umgebungsbasis von x und definiere

$$K := \{(\lambda, V) \mid \lambda \in \Lambda, V \in \mathcal{V}_x, x_\lambda \in V\} \text{ mit}$$

der Relation

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2) :\Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2,\ V_1 \supseteq V_2 .$$

Damit $(K, \leq)$ gerichtete Menge, denn (R), (T), (A) sind klar und (Ms) gilt wegen: $(\lambda_1, V_1), (\lambda_2, V_2) \in K$

$$\overset{\Lambda\,(\text{Ms})}{\Longrightarrow} \exists \lambda_3: \lambda_1 \leq \lambda_3,\ \lambda_2 \leq \lambda_3$$

$$\overset{(U2)}{\Longrightarrow} \exists V_3: V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$$

und somit $(\lambda_1, V_1), (\lambda_2, V_2) \leq (\lambda_3, V_3)$.

Nun definiere das Netz $y_{(\lambda,V)} := x_\lambda$, d.h. genauer $\varphi: K \to \Lambda$, $(\lambda, V) \mapsto \lambda$ und $y = x \circ \varphi$. Dann ist $y_{(\lambda,V)}$ Verfeinerung von x und $y_{(\lambda,V)} \to x$, denn sei $U \in \mathcal{U}_x$, dann wähle $V_0 \in \mathcal{V}_x: V_0 \subseteq U$. Sei $\lambda_1 \in \Lambda$ beliebig $\overset{x\text{ HW}}{\Longrightarrow} \exists \lambda_0 \in \Lambda, \lambda_0 \geq \lambda_1$: $x_{\lambda_0} \in V_0 \Rightarrow (\lambda_0, V_0) \in K$ und für $(\lambda, V) \geq (\lambda_0, V_0)$ gilt dann $y_{(\lambda,V)} = x_\lambda \in V \subseteq V_0 \subseteq U$.

$\square$

$\boxed{13}$ (a) Sei X ein top. R. und (E) eine Eigenschaft, die offene Mengen in X haben können und stabil unter (endl.) Vereinigungen ist, d.h.

$$U, V \text{ haben (E)} \Rightarrow U \cup V \text{ hat (E)}.$$

Dann gilt auf kp Räumen folgende Aussage:
Gilt (E) lokal (d.h. jedes $x \in X$ hat eine offene Umgebung mit (E)), dann gilt (E) schon global, d.h. X hat (E).

Beweis: $\forall x$ sei U_x eine offene Umgebung von x mit (E).
Es gilt $X = \bigcup_{x \in X} U_x$; X kp $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

Da sich (E) auf endl. Vereinigungen überträgt (Induktion), hat X die Eigenschaft (E). $\square$

Bsp: $f : X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt (d.h. $\forall x \in X$ $\exists$ $U_x \in \mathcal{U}_x$ mit $f|_{U_x}$ beschränkt, d.h. $\exists M_x : |f(x)| \leq M_x$ $\forall x \in U_x$) und X kp $\Rightarrow$ f beschränkt, d.h. $\exists M : |f(x)| \leq M$ $\forall x \in X$.

(b) Auf einer Menge X kann eine Topologie erzeugt werden, indem man ein geeignetes Mengensystem als Basis festlegt. Genauer:

Sei X eine Menge und $\mathcal{B}$ ein Teilsystem der Potenzmenge 2^X, das die beiden Eigenschaften

(B1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \forall x \in B_1 \cap B_2 \ \exists B_3 \in \mathcal{B}: \ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

besitzt, dann ist $\mathcal{O} := \{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, I \text{ beliebig} \}$

eine Top auf X. $\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Top auf X mit dieser Eigenschaft.

Der Zugang über Subbasen funktioniert ähnlich; der große Vorteil ist hier, dass das Mengensystem $\mathcal{S}$ das die Top erzeugt keinen Einschränkungen (wie etwa (B1), (B2)) unterliegt. Denn ein beliebiges $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ erzeugt eindeutig die Top

$$\mathcal{O} := \{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij} \mid S_{ij} \in \mathcal{S}, I \text{ beliebig}, n_i \in \mathbb{N} \}.$$

$\boxed{14}$ (a) Nein, denn per Def gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$

(b) Ja, denn X zsh $\iff$ $\nexists$ Disjunktion, d.h. $\nexists$ G_1, G_2 offen nicht-leer disjunkt mit $G_1 \cup G_2 = X$

Solche G_1, G_2 wären genau die nichttrivialen offenen & abg Mengen in X.

(c) Nein, triviales Gegenbsp $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$; $\mathbb{R}$ abg aber nicht kp

(d) JA (außer $|X| = 1$, dann trivialerweise T_2), denn die einzige offene Menge die einen beliebigen Pkt beinhaltet ist X selbst.

(e) JA, trivialerweise nach Def.