Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\sum$ /40

Note:

Prüfung zu

Grundbegriffe der Topologie

Sommerersemester 2015, Roland Steinbauer

5. Termin, 17.6.2015

1. *Stetigkeit.*
   (a) Definiere den Begriff der stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen und gib drei dazu äquivalente Bedingungen an.
   (4 Punkte)
   (b) Beweise: Konstante Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind stetig.
   (2 Punkte)
   (c) Definiere den Begriff Homöomorphismus. Diskutiere seine Wichtigkeit für das gesamte Gebiet der Topologie. (2 Punkte)
   (d) Gib ein Beispiel einer stetigen und bijektiven Funktion an, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist. (2 Punkte)

2. *Fixpunktsatz von Banach.*
   (a) Formuliere den Fixpunktsatz von Banach. (2 Punkte)
   (b) Worin liegt die Bedeutung des Fixpunktsatzes von Banach—insbesondere im Zusammenhang mit Anwendungen. (2 Punkte)
   (c) Beweise den Fixpunktsatz von Banach. Wo geht die Kontraktionseigenschaft ein, wo die Vollständigkeit? (6 Punkte)

3. *Vermischtes.*
   (a) *Zusammenhang.* Zeige, dass stetige Bilder zusammenhängender Mengen wieder zusammenhängend sind. (3 Punkte)
   (b) *Trennungsaxiome.* Formuliere die Trennungsaxiome T_0, T_1, T_2, T_3 und T_4 und gib alle Implikationen und Nicht-Implikationen zwischen diesen Trennungseigenschaften an. (5 Punkte)
   (c) *Abzählbarkeitsaxiome.* Formuliere die beiden Abzählbarkeitsaxiome AA1 und AA2 sowie die Eigenschaft der Separabilität für topologische Räume. (2 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Richtig oder falsch?*
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib ein (möglichst explizites und einfaches) Gegenbeispiel an oder argumentiere für oder gegen die Richtigkeit der Aussage. (je 2 Punkte)

(a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ weder leer noch ganz X. Falls A offen und abgeschlossen ist, dann ist X nicht zusammenhängend.

(b) Gleichmäßige Stetigkeit kann (auch) in allgemeinen topologischen Räumen definiert werden.

(c) Für eine Teilmenge A in einem kompakten Hausdorffraum ist Abgeschlossenheit äquivalent zur Kompaktheit.

(d) Ein isolierter Punkt einer Menge kann niemals ein Häufungspunkt dieser Menge sein.

(e) Inneres, Äußeres und Rand einer Menge sind paarweise disjunkt.

2016-06-13

Prüfungsausarbeitung S-Termin

1 (a) $f: X \to Y$ heißt stetig, falls die Urbilder offener Mengen offen sind

Dazu äquivalent ist

(1) Die Urbilder abg. Mengen sind abg

(2) $\forall x \in X \quad U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$

(3) $\forall x \quad \forall x_\lambda \to x$ (Netz) $\Rightarrow f(x_\lambda) \to f(x)$

(b) $f: X \to Y$, $y_0 \in Y$ & $f(x) = y_0 \; \forall x \in X$

Sei $O \subseteq Y$ offen, $y_0 \notin O \Rightarrow f^{-1}(O) = \emptyset$ offen

$y \in O \Rightarrow f^{-1}(O) = X$ offen

(c) $f: X \to Y$ heißt Homöo, falls f stetig, bijektiv <u>und</u> f^{-1} stetig ist.

Homöomorphismen sind die „Isomorphismen der Topologie": offensichtlich gilt $O \subseteq X$ offen $\Leftrightarrow f(O) \subseteq Y$ offen, daher auch für abg Mengen, Basen, Umgebungsbasen etc. Die beiden Räume sind daher vom Standpunkt der Topologie ununterscheidbar.

(d) $f:(X,\mathcal{O}_{dis}) \to (X,\mathcal{O}_{Ke})$, $f=id$ ist

ist stetig, bijektiv aber $f^{-1}=id:(X,\mathcal{O}_{Ke}) \to (X,\mathcal{O}_{dis})$ ist unstetig, denn sei $G\subseteq X$, $G\neq\emptyset$, $G\neq X$ dann ist $id^{-1}(G)$ in $\mathcal{O}_{Ke}$ nicht offen.

$\boxed{2}$ (a) Sei $T: X\to X$ Kontraktion am vollständigen metrischen Raum X. Dann hat T einen eindeutigen Fixpkt ξ und es gilt $\xi=\lim_{n\to\infty} T^n x$ für jeden Startpkt $x\in X$.

(b) Der Fixpktsatz v. Banach ist ein wichtiger „Existenzbeweis": er gewinnt die Lsg eines Fixpktproblems direkt aus der Vollständigkeit des zugrundeliegenden Raumes. Er liefert ohne Mühe einen Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen (Satz v. Picard-Lindelöf)

(c) Beweis: Sei $x\in X$ beliebig, dann gilt

$$d(T^{n+1}x, T^n x) \le K\, d(T^n x, T^{n-1}x) \le \dots \le K^n d(Tx,x). \quad (*)$$

Daher für $m>n$

$$d(T^m x, T^n x) \le d(T^m x, T^{m-1}x) + d(T^{m-1}x, T^{m-2}x) + \dots + d(T^{n+1}x, T^n x)$$

$$\overset{(*)}{\le} (K^{m-1}+K^{m-2}+\dots+K^n)\, d(Tx,x)$$

$$\le (K^n+K^{n+1}+\dots+K^{m-1})\, d(Tx,x)$$

geom. Reihe

$$= \frac{K^n}{1-K}\, d(Tx,x)$$

$K<1$ (Kontraktion) $\Rightarrow K^n\to 0 \Rightarrow (T^n x)_n$ Cauchy Folge

X vollst. $\Rightarrow \exists\, \xi := \lim T^n x$

z ist Fixpkt, denn $\xleftarrow{T\text{ stetig}}$

$$\underline{Tz} = T(\lim T^n x) = \lim (T^{n+1} x) = \underline{z}.$$

Außerdem ist z eindeutig, denn sei $\tilde{z}$ weiterer Fixpkt, dann gilt

$$d(z,\tilde{z}) = d(Tz, T\tilde{z}) \le K\, d(z,\tilde{z})$$

$K<1 \Rightarrow d(z,\tilde{z}) = 0 \Rightarrow z = \tilde{z}$. □

3 (a) $f: X \to Y$ stetig, X zsh $\overset{zz}{\Rightarrow} f(X) \subseteq Y$ zsh.

Indir ang $f(X) \subseteq Y$ nicht zsh $\Rightarrow \exists$ Disjunktion D_1, D_2 von $f(X) \Rightarrow f^{-1}(D_1), f^{-1}(D_2)$ offen,

$f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(f(X)) = X$, und

$f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) = f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Also ist $f^{-1}(D_1), f^{-1}(D_2)$ eine Disjunktion $\Rightarrow X$ nicht zsh ↯ □

(b) T_0: $\forall x \neq y\ \exists U$ offen $x \in U \not\ni y$ oder $\exists V$ offen $x \in V \not\ni y$

(T_1) —"— und —"—

(T_2) $\forall x \neq y\ \exists U, V$ offen $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$

(T_3) $\forall x\ \forall A \subseteq X$ abg $\exists U, V$ offen $U \cap V = \emptyset$ $x \in U$, $A \subseteq V$

(T_4) $\forall A, B$ abg $\exists U, V$ offen $U \cap V = \emptyset$ $A \subseteq U$, $B \subseteq V$

$$(T_4) \underset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow} (T_3) \not\Leftarrow (T_2) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (T_1) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (T_0)$$

$\boxed{3}$ (c) $(X, \mathcal{O})$ heißt AA1, falls jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt

—— " —— AA2, falls $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt

separabel, falls eine abzählbare, dichte Teilmenge von X existiert.

$\boxed{4}$ (a) Ja, denn A, A^c sind eine Disjunktion von X

(b) Nein, dazu benötigt man einen „Vergleich der Größe von Umgebungen" z.B. durch eine Metrik oder eine uniforme Struktur.

(c) Ja, denn X kp $\Rightarrow$ (A abg $\Rightarrow$ A kp)

X T_2 $\Rightarrow$ (A kp $\Rightarrow$ A abg)

(d) Ja, per Def, x HP von A, falls $\forall U \in \mathcal{U}_x \; \exists y \neq x : A \cap U \ni y$

x heißt isoliert, falls $\exists U \in \mathcal{U}_x \; U \cap A = \{x\}$

(e) Ja, per Def, denn $x \in A^\circ$, falls $\exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A$ $(\Rightarrow x \in A)$

$x \in \mathrm{ext}(A)$, falls $\exists U \in \mathcal{U}_x : U \subseteq A^c$ $(\Rightarrow x \notin A)$

$x \in \partial A$, falls $\forall U \in \mathcal{U}_x : U \cap A \neq \emptyset$

$(\Rightarrow x \notin A^\circ, x \notin \mathrm{ext} A)$