Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten"

Roland Steinbauer

SS 2016

1. (a) Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \to F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x?

   (b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?

   (c) Sei $f : E \to F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.

   (d) Sei $f : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:
   $$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$
   (*Hinweis:* $Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))$).

2. Zeige, dass
   $$c : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \ c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$$
   eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Sphäre um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

3. Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2\cos\theta - 1$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c?

4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve
   $$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)\,.$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion $s(t)$, eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung κ und gib eine Parametrisierung für die Evolute von c an.

6. (Haupsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei $\kappa : \ I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf dem Intervall I. Dann existiert eine Frenet-Kurve $c : \ I \to \mathbb{R}$ mit Krümmung κ. Die Kurve c ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

   Tipp: Verwende den Ansatz $e_1(s) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$ und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei $r = r(\varphi)$ die Darstellung einer Kurve c in Polarkoordinaten und sei $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, dass für die Bogenlänge von c gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.

10. (a) Zeige, dass man nahe $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$ im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

x und y als glatte Funktionen von (u, v) schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

(b) Zeige, dass nahe dem Punkt $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

u und v eindeutig als glatte Funktionen von x und y festgelegt sind. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}$ an der Stelle $(1, 1)$.

11. (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

(b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, sodass $f \circ g$ C^∞ ist, aber g nicht C^∞ ist.

12. Zeige, dass der Zylinder M im $\mathbb{R}^3$, der die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im $\mathbb{R}^3$ ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von M an.

13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$. Bestimme die Nullstellenmenge $M := f^{-1}(0)$ von f (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert f die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ auf M? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

14. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird. Bestimme die Dimension von M.

15. Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei (ψ, V) eine Karte von M und W offen in M. Dann ist auch $(\psi|_{V \cap W}, V \cap W)$ eine Karte von M.

(b) Sei $f : M \to N$ C^∞ und U offen in M. Dann ist $f|_U : U \to N$ C^∞.

(c) Sei $f : M \to N$ stetig. Zeige: f ist genau dann C^∞, wenn für jede glatte Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$ mit V offen in N gilt: $g \circ f$ ist glatt.

16. (a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom vom Grad ≥ 1, das an mindestens einer Stelle einen positiven Wert annimmt. Zeige: dann ist die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

    (b) Zeige, dass das ein- bzw. zweischalige Hyperboloid $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_2^3 = -1\}$ eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

17. (a) Show that the chart $(\psi, \mathbb{R})$, $\psi : x \mapsto x^3$ defines a $\mathcal{C}^\infty$-structure on $\mathbb{R}$ which is different from the standard $\mathcal{C}^\infty$-structure on $\mathbb{R}$.

    (b) Find a diffeomorphism between the manifolds considered in (a).

18. For any real number $r > 0$, consider the map $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ rx & x > 0 \end{cases}$$

Show that for each r, the atlas $\{(\varphi_r, \mathbb{R})\}$ defines a differentiable structure on $\mathbb{R}$. Show that these structures are all different. Are the corresponding (uncountably many) manifolds pairwise diffeomorphic?

19. Let $M := U \cup V$, where U, V are given by

$$\begin{aligned} U &:= \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \\ V &:= \{(s,0) \mid s < 0\} \cup \{(s,1) \mid s > 0\}. \end{aligned}$$

Let $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $\varphi(s,0) := s$, $\psi : V \to \mathbb{R}$, $\psi(s,0) := s$, $\psi(s,1) := s$, and $\gamma : V \to \mathbb{R}$, $\gamma(s,0) := s^3$, $\gamma(s,1) := s^3$.

   (i) Show that $\{(\varphi, U), (\psi, V)\}$ defines a $\mathcal{C}^\infty$-structure on M.

   (ii) Is (γ, V) a chart in this differentiable structure?

20. (a) Let $f : M_1 \to M_2$ and $g : M_2 \to M_3$ be smooth maps between differentiable manifolds. Show that $g \circ f : M_1 \to M_3$ is smooth as well.

    (b) Show that the dimension of a connected manifold M is a well-defined number n. *Hint:* if $\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ and $\psi : W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ are compatible charts around $p \in V \cap W$, then $m = n$. Let $\dim_p M := n$. Then $p \mapsto \dim_p M$ is locally constant, hence constant on M.