Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten"

Roland Steinbauer

SS 2016

1. (a) Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \to F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x?

   (b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?

   (c) Sei $f : E \to F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.

   (d) Sei $f : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:
   $$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$
   (*Hinweis:* $Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))$).

2. Zeige, dass
   $$c : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$$
   eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Sphäre um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

3. Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2\cos\theta - 1$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$. Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c?

4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve
   $$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)\,.$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion $s(t)$, eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung κ und gib eine Parametrisierung für die Evolute von c an.

6. (Haupsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei $\kappa : \ I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf dem Intervall I. Dann existiert eine Frenet-Kurve $c : \ I \to \mathbb{R}$ mit Krümmung κ. Die Kurve c ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

   Tipp: Verwende den Ansatz $e_1(s) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$ und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei $r = r(\varphi)$ die Darstellung einer Kurve c in Polarkoordinaten und sei $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, dass für die Bogenlänge von c gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.

10. (a) Zeige, dass man nahe $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$ im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

x und y als glatte Funktionen von (u, v) schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

(b) Zeige, dass nahe dem Punkt $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

u und v eindeutig als glatte Funktionen von x und y festgelegt sind. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}$ an der Stelle $(1, 1)$.

11. (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

(b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, sodass $f \circ g$ C^∞ ist, aber g nicht C^∞ ist.

12. Zeige, dass der Zylinder M im $\mathbb{R}^3$, der die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im $\mathbb{R}^3$ ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von M an.

13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$. Bestimme die Nullstellenmenge $M := f^{-1}(0)$ von f (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert f die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ auf M? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

14. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird. Bestimme die Dimension von M.

15. Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei (ψ, V) eine Karte von M und W offen in M. Dann ist auch $(\psi|_{V \cap W}, V \cap W)$ eine Karte von M.

(b) Sei $f : M \to N$ C^∞ und U offen in M. Dann ist $f|_U : U \to N$ C^∞.

(c) Sei $f : M \to N$ stetig. Zeige: f ist genau dann C^∞, wenn für jede glatte Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$ mit V offen in N gilt: $g \circ f$ ist glatt.

16. (a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom vom Grad ≥ 1, das an mindestens einer Stelle einen positiven Wert annimmt. Zeige: dann ist die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

    (b) Zeige, dass das ein- bzw. zweischalige Hyperboloid $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_2^3 = -1\}$ eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

17. (a) Show that the chart $(\psi, \mathbb{R})$, $\psi : x \mapsto x^3$ defines a $\mathcal{C}^\infty$-structure on $\mathbb{R}$ which is different from the standard $\mathcal{C}^\infty$-structure on $\mathbb{R}$.

    (b) Find a diffeomorphism between the manifolds considered in (a).

18. For any real number $r > 0$, consider the map $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ rx & x > 0 \end{cases}$$

Show that for each r, the atlas $\{(\varphi_r, \mathbb{R})\}$ defines a differentiable structure on $\mathbb{R}$. Show that these structures are all different. Are the corresponding (uncountably many) manifolds pairwise diffeomorphic?

19. Let $M := U \cup V$, where U, V are given by

$$\begin{aligned} U &:= \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \\ V &:= \{(s,0) \mid s < 0\} \cup \{(s,1) \mid s > 0\}. \end{aligned}$$

Let $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $\varphi(s,0) := s$, $\psi : V \to \mathbb{R}$, $\psi(s,0) := s$, $\psi(s,1) := s$, and $\gamma : V \to \mathbb{R}$, $\gamma(s,0) := s^3$, $\gamma(s,1) := s^3$.

    (i) Show that $\{(\varphi, U), (\psi, V)\}$ defines a $\mathcal{C}^\infty$-structure on M.

    (ii) Is (γ, V) a chart in this differentiable structure?

20. (a) Let $f : M_1 \to M_2$ and $g : M_2 \to M_3$ be smooth maps between differentiable manifolds. Show that $g \circ f : M_1 \to M_3$ is smooth as well.

    (b) Show that the dimension of a connected manifold M is a well-defined number n. *Hint:* if $\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ and $\psi : W \to \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ are compatible charts around $p \in V \cap W$, then $m = n$. Let $\dim_p M := n$. Then $p \mapsto \dim_p M$ is locally constant, hence constant on M.

21. Let $(A_i)_{i\in I}$ be a locally finite family of subsets of a topological space X. Show that $(\overline{A}_i)_{i\in I}$ is locally finite as well and that

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$$

22. Let M be a C^∞-manifold (Hausdorff and second countable). Let U be open in M and let a $A \subseteq U$ be closed. Then there exists a smooth function $f : M \to \mathbb{R}$ with $f|_A = 1$ and $f|_{M\setminus U} = 0$.

23. Let M be a C^∞-manifold (Hausdorff and second countable). Let $p \in U$, U open in M and $f : U \to \mathbb{R}$ smooth. Show that there exists a smooth function $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ that conicides with f in a neighborhood of p.

24. (a) Let (ψ, V) denote the following chart of S^1: $V = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\}$, $\psi(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$. Let $f : S^1 \to \mathbb{R}$ be such that $f(\cos\theta, \sin\theta) = e^{2\theta}$ on V. Calculate $\frac{\partial}{\partial\theta}\big|_{p_0} f$, where $p_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$.

    (b) Let M be a manifold, (ψ, V) a chart and $\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. Let $f : p \mapsto g(x^1(p), \dots, x^n(p))$. Express $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p f$ by g.

25. Let (ψ, V) be as in the previous problem and let (φ, U) be the following chart of S^1: $U = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) \mid x \in (-1,1)\}$, $\varphi : (x, -\sqrt{1-x^2}) \mapsto x$. Express $\frac{\partial}{\partial\theta}$ by $\frac{\partial}{\partial x}$, and conversely.

26. (a) Find a basis of the tangent space of S^2 in a general point (use spherical coordinates).

    (b) Let $f : S^2 \to \mathbb{R}$ be the restriction of $(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^2$ to S^2. Find the matrix of the tangent map of f in $p \in S^2$ with respect to the basis given in (a) and the natural basis of $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$.

27. Let M be a manifold and let $p \in M$. Denote by $\mathcal{F}_p(M)$ the space of smooth functions defined locally around p which are of the form

$$f = c + \sum_{i\in I} f_i g_i$$

where c is constant and I is a finite set (c and I depend on f), and $f_i(p) = g_i(p) = 0$ for all $i \in I$. Prove: A linear map ∂ defined on the set of smooth functions locally defined around p is a derivation if and only if it vanishes on $\mathcal{F}_p(M)$. (This provides an alternative but equivalent way of defining the tangent space of a manifold).

28. Beweise Lemma 2.5.2 aus der Vorlesung. Genauer seien $f : M \to N$, $g : N \to P$ glatt, dann gilt
$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$$
und $T(id_M) = id_{TM}$ und daher für jeden Diffeomorphismus $f : M \to N$, $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$.

29. Beweise, dass die Vektorraumstruktur in den Fasern eines Vektorbündels kartenunabhängig ist, vgl. Skriptum p. 42. Genauer sei (E, B, π) ein Vektorbündel, $b \in B$ und $E_b := \pi^{-1}(b)$ die Faser über b. Mittels einer Vektorbündelkarte (Ψ, W) bei b und für $e_1, e_2 \in E_b$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\Psi(e_i) = (w', f'_i)$ $(i = 1, 2)$ definieren wir
$$e_1 + \lambda e_e := \Psi^{-1}(w', f'_1 + \lambda f'_2).$$
Zeige, dass diese Definition nicht von der Wahl von Ψ abhängt.

30. Sei (E, B, π) ein Vektorbündel und $\Psi : W \to W' \times F'$ eine Vektorbündelkarte von E. Zeige, dass $W = \pi^{-1}(W \cap B)$.

31. Sei (E, B, π) ein Vektorbündel, $b \in B$ und $\Psi : W \to W' \times F'$ eine Vektorbündelkarte von E mit $\Psi(b) = (w', 0)$. Zeige, dass dann für die Faser von E über b gilt:
$$\pi^{-1}(b) = \Psi^{-1}(\{w'\} \times F').$$

32. Zeige, dass jedes (E, B, π) wie in 2.5.6 (ii) ein Vektorbündel im Sinn von 2.5.5 ist. *Anleitung:* Wähle eine Überdeckung von B durch Karten $(\varphi_\alpha, V_\alpha)$ so, dass für jedes V_α ein $\tilde{\Psi}_\alpha : \pi^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha \times F'$ wie in 2.5.6 (ii) existiert. Setze dann $\Psi_\alpha := (\varphi_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \tilde{\Psi}_\alpha$, $W_\alpha := \pi^{-1}(V_\alpha)$ und zeige, dass $\{(\Psi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ein Vektorbündel-Atlas von E im Sinn von 2.5.5 ist.

33. Beweise, dass die Lieklammer für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,
$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \qquad (f \in \mathcal{C}^\infty(M))$$
eine Derivation ist und daher wieder ein Vektorfeld definiert.

34. Zeige Proposition 2.5.15 aus der Vorlesung, also, dass für Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und glatte Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ folgende Aussagen gelten:

   (i) $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ ist $\mathbb{R}$-bilinear.

   (ii) $[X, Y] = -[Y, X]$ $\quad$ ($[\ ,\ ]$ ist antisymmetrisch).

   (iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobiidentität).

   (iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

   (v) $[\ ,\ ]$ ist lokal: Für $V \subseteq M$ offen gilt $[X, Y]|_V = [X|_V\,, Y|_V]$.

   (vi) Lokale Darstellung: Für eine Karte (ψ, V) mit $\psi = (x^1, \dots, x^n)$, $X|_V = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_V = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, gilt

$$[X, Y]|_V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

35. Seien M, N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für X ein glattes Vektorfeld auf M ($X \in \mathfrak{X}(M)$) sei $f_*X := Tf \circ X \circ f^{-1}$ der Push-Forward von X unter f. Zeige:

   (a) f_*X ist ein glattes Vektorfeld auf N.

   (b) Für $g \in C^\infty(N)$ und $p \in N$ gilt: $(f_*X)(g)(p) = X_{f^{-1}(p)}(g \circ f)$ (verwende (2.4.4) aus der Vorlesung).

   (c) Zeige mittels (b), dass für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt: $[f_*X, f_*Y] = f_*([X, Y])$.

36. Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y := f_*X \in \mathfrak{X}(N)$ der Push-Forward von X unter f. Zeige:

   (a) Ist c eine Integralkurve von X, dann ist $f \circ c$ eine Integralkurve von Y.

   (b) Für den Fluss von Y gilt: $\mathrm{Fl}_t^Y = f \circ \mathrm{Fl}_t^X \circ f^{-1}$.

37. Seien X, Y, Z die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \\ Y &= x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} \\ Z &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

   Zeige, dass die Abbildung $\alpha : \mathcal{M} := \{aX + bY + cZ \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(aX + bY + cZ) = (a, b, c)$ wohldefiniert ist und dass für $U, V \in \mathcal{M}$ gilt: $\alpha([U, V]) = \alpha(U) \times \alpha(V)$ (Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$).

38. Berechne die Flüsse der Vektorfelder X, Y, Z aus Aufgabe 37. Interpretiere die Abbildungen geometrisch. Sind X, Y und Z vollständig?

39. Seien E, F n-dimensionale Vekorräume, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_n\}$ Basen von E bzw. F und $\mathcal{B}_{E^*} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$, $\mathcal{B}_{F^*} = \{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ die zugehörigen dualen Basen. Sei $\varphi : E \to F$ ein linearer Isomorphismus, der bezüglich $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ die Matrix $[\varphi]_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} = A = (A^i{}_j)_{i,j}$ besitzt. Schließlich sei $[\varphi^{-1}]_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E} = B = (B^i{}_j)_{i,j}$. Zeige:

   (a) $[\varphi^*]_{\mathcal{B}_{F^*},\mathcal{B}_{E^*}} = A^t$.

   (b) Sei $t \in T^r_s E$, $t = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \dots \otimes \alpha^{j_s}$. Dann ist

$$\varphi^r_s t = (t')^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} f_{i'_1} \otimes \dots \otimes f_{i'_r} \otimes \beta^{j'_1} \otimes \dots \otimes \beta^{j'_s}$$

   mit $(t')^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot A^{i'_1}{}_{i_1} \cdot \ldots \cdot A^{i'_r}{}_{i_r} \cdot B^{j_1}{}_{j'_1} \cdot \ldots \cdot B^{j_s}{}_{j'_s}$.

40. Seien $(\varphi = (x^1, \dots, x^n), U)$, $(\psi = (y^1, \dots, y^n), V)$ Karten von M um $p \in M$. Zeige:

   (a)

$$dx^i\big|_p = \sum_{k=1}^n D_k(\varphi^i \circ \psi^{-1})(\psi(p))\, dy^k\big|_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\bigg|_p\, dy^k\big|_p$$

   (Hinweis: es genügt z.z., dass die rechte Seite der obigen Gleichung gerade die zu $\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p \}$ duale Basis von T_pM^* bildet.)

   (b) Sei $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$ mit Komponenten ${}^{\varphi}t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ bezüglich φ. Dann sind die Komponenten von t bezüglich ψ gegeben durch

$${}^{\psi}t^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}(p) = {}^{\varphi}t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p)\, \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}}\bigg|_p \cdot \ldots \cdot \frac{\partial y^{a_r}}{\partial x^{i_r}}\bigg|_p \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{b_1}}\bigg|_p \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{b_s}}\bigg|_p$$

41. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\alpha \in \Lambda^2 E^*$ und $\beta \in \Lambda^1 E^*$. Dann gilt für $e_1, e_2, e_3 \in E$:

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, e_2, e_3) = \alpha(e_1, e_2)\beta(e_3) - \alpha(e_1, e_3)\beta(e_2) + \alpha(e_2, e_3)\beta(e_1)\,.$$

42. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\alpha \in \Lambda^k E^*$. Seien $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k \in E$, mit $g_i = a^j_i f_j$. Sei $A = (a^j_i)^k_{i,j=1}$. Dann gilt:

$$\alpha(g_1, \dots, g_k) = \det(A)\alpha(f_1, \dots, f_k).$$

43. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\alpha \in \Lambda^k E^*$. Zeige: ist k ungerade, dann ist $\alpha \wedge \alpha = 0$. Stimmt dies auch für k gerade? (Beweis oder Gegenbeispiel).

44. Für ein Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathbb{R}^n$ sei die Divergenz von X definiert als $\mathrm{div}X := \sum_{i=1}^n \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$. Sei nun $n = 3$ und

$$\mathrm{rot}X = \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Definiere weiters die Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega_X &:= a^1 dx + a^2 dy + a^3 dz \\ \eta_X &:= a^1 dy \wedge dz + a^2 dz \wedge dx + a^3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Zeige

(a) $df = \omega_{\mathrm{grad}f}$, $d\omega_X = \eta_{\mathrm{rot}X}$, $d(\eta_X) = (\mathrm{div}X) dx \wedge dy \wedge dz$.

(b) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}f = 0$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}X = 0$.

45. Sei M ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂M (sodass also M eine n-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ist). Sei $i : \partial M \hookrightarrow M$.

(a) Für $n = 2$ sei $\omega = xdy - ydx$. Zeige, dass die Fläche von M gegeben ist durch $\frac{1}{2}\int_{\partial M} i^*\omega$.

(b) Für $n = 3$ sei $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$. Zeige, dass das Volumen von M gegeben ist durch $\frac{1}{3}\int_{\partial M} i^*\omega$.

(c) Wie sieht die entsprechende Formel für allgemeines n aus?

46. Sei E ein n-dimensionaler Vektorraum und $k \leq n$. Zeige: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in E^*$ sind linear abhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = 0$.

47. Seien φ, $\psi \in L(E, E)$. Leite die folgenden Eigenschaften der Determinante direkt aus der Definition 2.7.12 her:

(a) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$.

(b) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(c) φ ist ein linearer Isomorphismus genau dann, wenn $\det(\varphi) \neq 0$. mit $\varphi(e_1) = 0$. $\varphi^*\omega(e_1, \ldots, e_n))$.

48. Für ein Vektorfeld $X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathbb{R}^n$ sei die Divergenz von X definiert als $\mathrm{div}X := \sum_{i=1}^n \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$. Sei nun $n = 3$ und

$$\mathrm{rot}X = \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Definiere weiters die Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega_X &:= a^1 dx + a^2 dy + a^3 dz \\ \eta_X &:= a^1 dy \wedge dz + a^2 dz \wedge dx + a^3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Zeige

(a) $df = \omega_{\mathrm{grad}f}$, $d\omega_X = \eta_{\mathrm{rot}X}$, $d(\eta_X) = (\mathrm{div}X) dx \wedge dy \wedge dz$.

(b) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}f = 0$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}X = 0$.

49. Zeige: für glatte Funktionen a_{ij} sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(a) $d(\sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j) = 0$.

(b) $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} = 0$ für alle $i < j < k$.

50. Berechne die 1. Fundamentalform für

    (a) die Sphäre S^2 bzüglich der Parametrisierung

    $$\begin{aligned} F: (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(\theta, \varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \end{aligned}$$

    (b) den Zylinder $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$ bezüglich der Parametrisierung

    $$\begin{aligned} F: (0, 2\pi) \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ F(\varphi, r) &= r(\cos\varphi, \sin\varphi, 1) \end{aligned}$$

51. Für das hyperbolische Paraboloid

    $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

    berechne die Weingartenabbildung, sowie Haup- mittlere und Gaußkrümung im Punkt $p = (0, 0, 0)$. *Hinweis:* Stelle S als Nullstellenmenge dar.

52. Für den Torus, gegeben durch die Gleichung

    $$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \quad \text{mit } r < R$$

    bestimme eine Parametrisierung, sowie 1. und 2. Fundamentalform, Weingartenabbildung und Haup- mittlere und Gaußkrümung.