3.2 Orthonormalbasen

44. *Das Gram-Schmidt Verfahren zum ersten: Eine explizite Formel.*
Im Beweis von Satz 3.27 (Gram-Schmidt Verfahren) wird für die linear unabhängige, abzählbare Teilmenge $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ des Hilbertraums H das Orthonormalsystem $S = \{e_1, \dots\}$ konstruiert. Ziel dieser Aufgabe ist es explizite Formeln für die e_i herzuleiten. (Diese werden in den nächsten beiden Aufgaben dringendst benötigt!). Herzstück ist es natürlich, eine explizite Formel für die Ortogonalprojektion P_{M_n} auf $M_n = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ zu finden. (*Tipp:* Eine Möglichkeit ist es, die Formel zu erraten oder nachzuschlagen und dann Aufgabe 38 zu verwenden.)

45. *Die Legendre-Polynome—Das Gram-Schmidt Verfahren zum zweiten.*
Im Hilbertraum $L^2[-1,1]$ wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Funktionen $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ an. Dadurch entsteht die orthonormale Folge L_n der Legendre-Funktionen und die Folge P_n der Legrendre-Polynomen, die gemäß
$$L_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\; P_n(x)$$
definiert ist. (Die Legendre-Polynome finden vor allem in der Quantenmechnik bei der Diskussion der Drehimpulsoperatoren Verwendung—Stichwort: ,,Kugelfunktionen"—unter anderem bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom). *Hinwes:* Berechne zunächst ,,auf Vorrat" $\int_{-1}^{1} x^n dt$ und halte mindestens bis P_3 durch oder verwende ein Computeralgebrasystem deiner Wahl.

46. *Die Laguerre-Polynome—Das Gram-Schmidt Verfahren zum dritten.*
Im Hilbertraum $L^2[0,\infty]$ wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Funktionen $x_n(t) = (-t)^n e^{-t/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ an, um die Laguerre-Funktionen f_n zu berechnen und damit die Laguerre-Polynome L_n, die gemäß
$$f_n = \frac{1}{n!}\, e^{-t/2}\, L_n$$
definiert sind. (Die Laguerre-Polynome treten in der Quantenmechanik ebenfalls bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung (Radialanteil) für das Wasserstoffatom auf.) *Hinweis:* Beschaffe dir wiederum auf Vorrat die Integrale $\int_0^\infty e^{-t} t dt$ (Tipp: Gamma-Funktion) und halte bis L_3 durch, oder/und verwende ein Computeralgebrasystem deiner Wahl.

47. *Der Satz von Riesz-Fischer.*
Gib konkret den Isomorphismus aus Thm. 3.36 für den Hilbertraum $L^2[-\pi,\pi]$ und die Orthonormalbasis
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \quad (k = 1, 2, \dots)$$
an und leite aus der Gleichheit der entsprechenden Skalarprodukte in L^2 und l^2 die Parseval-Gleichung für die ,,klassischen" Fourierkoeffizienten a_k, b_k ab.

Hinweis: Hier wird die konkrete Rechnung einfacher, wenn l^2 in der Form
$$l^2 = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots) |\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \sum |\alpha_i|^2 + \sum |\beta_i|^2 < \infty\}$$
geschrieben wird. Warum ist das erlaubt?

3.3 Dualraum eines Hilbertraums, Adjungierter Operator

48. *H' als Hilbertraum.*
Mache Bem. 3.43 explizit indem du zeigst, dass H' vermöge der folgenden Definition zum Hilbertraum wird: Für y im Hilbertraum H sei f_y das durch $f_y(x) = \langle x|y\rangle$ definierte stetige, lineare Funktional auf H (vgl. Thm. 3.42, Satz von Riesz-Fréchet) und weiters sei das Skalarprodukt auf H' definiert durch

$$\langle f_y|f_z\rangle := \langle z|y\rangle.$$

49. *Eigenschaften der Adjunktion.*
Beweise Prop. 3.45 aus der Vorlesung, dh. zeige für die Operatoren T, T_2, $T_2 \in L(K, H)$ zwischen den Hilberträumen K und H sowie ihren Adjungierten $T*$, T_1^*, $T_2^* \in L(K, H)$ die folgenden Aussagen:

   (i) $T^{**} = T$
   (ii) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$
   (iii) $(T_1^* + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
   (iv) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$ (für alle $\lambda \in \mathbb{K}$)
   (v) $(S\,T)^* = T^*S^*$ (für $S \in L(K, G)$, G ein weiterer Hilbertraum)
   (vi) $\mathrm{id}_H^* = \mathrm{id}_K$
   (vii) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, falls T invertierbar ist.