5 Hauptsätze der Funktionalanalysis

62. *Explizite Fortsetzung eines Funktionals.*

    (i) Auf dem Teilraum
    $$W := \{(x, y, z) \mid x + 2y = 0,\, z = 0\}$$
    des Banachraums $(\mathbb{R}^3, \| \, \|_1)$ sei das stetige lineare Funktional f durch $f((x, y, z)) := x$ definiert. Gib mindestens zwei verschiedene Erweiterungen von f auf $\mathbb{R}^3$ mit gleicher Norm wie f an.

    (ii) Wie sieht die Situation von (i) aus, wenn $\| \, \|_1$ durch $\| \, \|_2$ ersetzt und damit $\mathbb{R}^3$ zum Hilbertraum gemacht wird?

63. *Dualbasis.*
    Zeige: Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig in einem normierten Raum E, so existieren $f_1, \ldots, f_n \in E'$ mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

64. *Existenz von Projektionen auf endlichdimensionale Unterräume.*

    (i) Sei E ein normierter Raum und M ein endlichdimensionaler Teilraum von E. Zeige, dass dann ein stetiger linearer Projektionsoperator P_M von E auf $M (\subseteq E)$ existiert (das heißt $M = \operatorname{im} P_M,\ {P_M}^2 = P_M$). (*Tipp:* Aufgabe 63!)

    (ii) Wie erhält man ein derartiges P_M im Spezialfall eines Hilbertraumes E am einfachsten?

65. *L^p für $0 < p < 1$.*
    Sei $\mathrm{L}^p[0, 1]$ $(0 < p < 1)$ der metrische Vektorraum
    $$\{f : [0, 1] \to \mathbb{K} :\ f \text{ L-meßbar},\ \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty\}$$
    mit $d(f, g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p \, dt$ (strenggenommen besteht L^p aus den bekannten Äquivalenzklassen).

    Zeige: $(\mathrm{L}^p)' = \{0\}$, das heißt, außer dem Nullfunktional gibt es auf L^p $(0 < p < 1)$ keine stetigen linearen Funktionale. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist L^p damit nicht normierbar.

    (*Hintergrundinformation:* Schuld an $(\mathrm{L}^p)' = \{0\}$ ist, dass L^p nicht einmal eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt, also kein sogenannter *lokalkonvexer* Vektorraum ist. Für solche gilt nämlich ebenfalls der Satz von Hahn-Banach, der die Existenz „vieler" stetiger linearer Funktionale garantiert.)

    Anleitung: Zum Beweis betrachte ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ auf L^p; für $f \in \mathrm{L}^p$ mit $\int |f|^p = 1$, $\varphi(f) = \alpha > 0$ sei $F(t) := \int_0^t |f(s)|^p \, ds$. Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist F stetig und nimmt daher jeden Wert zwischen $F(0)$ und $F(1)$ an — speziell alle Werte $\frac{k}{n}$, etwa an den Stellen s_k $(k = 0, \ldots, n)$. Nun sei $g_r := f \cdot c_{[s_{r-1}, s_r]}$. Dann ist $\int |g_r|^p = \frac{1}{n}$; für mindestens ein $r(n)$ muß gelten: $|\varphi(g_r)| \geq \frac{\alpha}{n}$. Wenn du nun die Funktionenfolge $f_n := n \cdot g_{r(n)}$ betrachtest, ergibt sich die Unstetigkeit von φ.

66. *Punktweise Limiten von Operatorfolgen—Ein Variante.*
    Zeige folgende Variante zu Kor. 5.43 aus der Vorlesung: Seien E, F Banachräume, $T_n \in L(E, F)$ $(n \in \mathbb{N})$. Existiert $\lim_n T_n x$ für alle x aus einer dichten Teilmenge A von E und ist $\sup_n T_n x$ für alle x aus E beschränkt, dann existiert $\lim T_n x$ für alle $x \in E$ und der Grenzoperator ist in $L(E, F)$.

67. *Projektionen in Banachräumen.*
Als Anwendung des Satzes von der offenen Abbildung (es reicht Kor. 5.52) beweise Satz 3.7. Genauer zeige im Banachraum E: Ist U abgeschlossener Teilraum von E und es existiert ein abgeschlossener Teilraum V, der zu U im algebraischen Sinne komplementär ist (d.h. $E \simeq U \oplus V$ algebraisch), dann gilt

   (i) $E \simeq U \oplus V$ als Banachraum,

   (ii) Es existiert eine stetige Projektion von E auf U.

68. *Ein abgeschlossener Operator.*
Führe die Details von Bsp. 5.59(i) genauer aus: Sei $T : (\mathrm{C}^1[0,1], \| \, \|_\infty) \to (\mathrm{C}[0,1], \| \, \|_\infty)$ definiert durch $Tf := f'$. Zeige: T ist nicht stetig aber abgeschlossen.