1
2
3
4
G

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung zu

Funktionalanalysis

Sommersemester 2019, Roland Steinbauer

3. Termin, 19.12.2019

1. *Normierte Vektorräume & Operatoren.*

   (a) *Teilräume von Banachräumen*
   Zeige, dass ein Teilraum W eines Banachraums V genau dann vollständig ist, wenn er abgeschlossen ist. (2 Punkte)

   (b) *Äquivalente Normen.*
   Diskutiere ein Beispiel eines Vektorraumes mit zwei nicht äquivalenten Normen. (2 Punkte)

   (c) *Vollständigkeit von $L(E, F)$.*
   Zeige, falls F ein Banachraum ist, so auch $L(E, F)$. Zusätzlich bearbeite die folgenden Punkte: Wo wird die Vollständigkeit von F verwendet? Gib das Grundschema des Beweises im Überblick an. (4 Punkte)

   (d) *Beispiele.*
   Nenne jeweils einen Funktionen- oder Folgenraum, mit den folgenden Eigenschaften und begründe kurz: (2 Punkte)
   - nicht separabler Banachraum
   - nicht reflexiver Banachraum

2. *Hilberträume & Operatoren*

   (a) *Maximale Orthonormalsysteme.*
   Definiere den Begriff Orthonormalbasis im Prähilbertraum und diskutiere seine Beziehung zum Begriff maximales Orthonormalsystem. Was ändert sich im Hilbertraum? (3 Punkte)

   (b) *Spektralsatz.*
   Formuliere den Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren und diskutiere seine Bedeutung. (3 Punkte)

(c) *Existenz des adjungierten Operators.*
Zeige, dass es zu jedem $T \in L(H, K)$ (H, K Hilberträume) einen eindeutig bestimmten adjungierten Operator $T^* \in L(K, H)$ gibt. Verwendet der Beweis die Vollständigkeit, und wenn ja wo? (4 Punkte)

3. *Hauptsätze der Funktionalanalysis*

   (a) *Beschränktheit via Funktionale.*
   Zeige, dass ein Teilraum M eines normierten Vektoraums E beschränkt ist, falls für alle Funktionale $x' \in E'$ das Bild $x'(M) \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt ist. Welches Hauptresultat der (linearen normierten) Funktionalanalysis geht hier ein? Warum muss E nicht vollständig sein? (4 Punkte)

   (b) *Offene Abbildung.*
   Formuliere den Satz von der offenen Abbildung und folgere daraus den Isomorphiesatz von Banach. Formuliere letzteren auch explizit. (3 Punkte)

   (c) *Reichhaltigkeit von E'.*
   Zeige, dass der Dualraum E' die Punkte des normierten Vektorraums E trennt und insbesondere nicht-trivial ist. Was bedeutet das jeweils genau? (3 Punkte)

4. *Beispiele*
   Gib jeweils ein Beispiel an und begründe kurz, warum es die geforderten Eigenschaften hat bzw. begründe, warum es kein solches Beispiel geben kann. (Jeweils 2 Punkte)

   (a) Ein unbeschränktes lineares Funktional.

   (b) Ein abgeschlossener Operator zwischen normierten Vektorräumen, der nicht stetig ist.

   (c) Ein unendlichdimensionaler Banachraum, der kein Hilbertraum ist.

   (d) Ein Orthogonal-Projektor P_M auf einen abgeschlossenen Teilraum M eines Hilbertraums mit Norm $\|P_M\| < 1$.

   (e) Ein unendlichdimensionaler Banachraum mit kompakter Einheitskugel.