Musterlösung zur Aufgabe der Woche
zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 31.3. 2020

1. **Cauchyfolgen** Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$
eine Cauchyfolge ist, indem Sie direkt die Definition anwenden.
Lösung: Um diese Beispiel ausführlich und richtig zu lösen betrachten wir zunächst die Definition einer Cauchyfolge. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn gilt:
$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \textit{für alle}\, n, m > n_0.$$
Unsere Aufgabe ist es mit dieser Definition zu zeigen, dass $x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ eine Cauchyfolge ist. Wir müssen zu jedem Wert $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 angeben können, sodass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m > n_0$ gilt. Sei $\epsilon > 0$. Wir untersuchen zunächst die linke Seite unserer Ungleichung.
$$|x_n - x_m| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^m}{m^2}\right|$$
Jetzt müssen wir geschickt umformen damit wir die Dreiecksungleichung anwenden können.
$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^m}{m^2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| + \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\right|$$
Um jetzt weiterrechnen zu können wäre es hilfreich wenn wir wüssten ob m oder n die größere Zahl ist. Leider wissen wir das nicht.
Wir können aber o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, dass $n \geq m$. (Falls es in Wirklichkeit genau umgekehrt ist, kann man den Beweis analog führen, aus diesem schränkt unsere Annahme die Allgemeinheit des Beweises nicht ein.) Damit folgt:
$$\frac{m^2 + n^2}{n^2 m^2} \leq \frac{2n^2}{n^2 m^2} = \frac{2}{m^2}$$
An dieser Stelle haben wir einen einfachen Ausdruck mit dem es sich gut arbeiten lässt. Unsere Frage ist wie groß n und m sein müssen, damit $\frac{2}{m^2} < \epsilon$ ist. Die umgeformte Variante diese Ausdrucks liefert uns:
$$m > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$$

Jetzt können wir erkennen wie groß n_0 mindestens sein muss. n_0 muss auf jeden Fall größer als $\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$ sein und da n_0 eine natürliche Zahl ist, nehmen wir uns die Gaußklammer zu Hilfe. Diese Klammer $\lfloor x \rfloor$ (auch geschrieben als $[x]$ gibt uns die nächst kleinere ganze Zahl zum Wert x.
Somit können wir $n_0 := \lfloor \sqrt{\frac{2}{3}} \rfloor + 1$ wählen, welches unsere Bedingungen erfüllt.

2. **Teilfolgen** Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

   (a) Das ist wahr.
   (b) Das ist falsch.
   (c) Das hängt von n ab.
   (d) Das hängt von b_n ab.

   Lösung: Bei diesem Beispiel kann es helfen die Folgen in aufzählender Schreibweise zu betrachten.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1, ...) = (2, 5, 10, 17, ...)$$

   Eine Teilfolge entsteht aus einer gegebenen Folge in dem man eine streng monoton steigende Folge von Indizes $k_1 < k_2 < k_3 < ..$ definiert. In diesem Fall können wir so eine Folge definieren, denn

$$b_n = a_{n^2+1}$$

   Somit ist (a) die einzige richtige Lösung, da wir mit jedem natürlichen n beginnen können und keine Abhängigkeit von b_n verlangt wird.

3. **Teilfolgen** Wir betrachten die Folge

$$(1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, ...)$$

   . Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

   (a) Sie ist konvergent.
   (b) Sie hat genau eine konvergente Teilfolge.
   (c) Sie hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.
   (d) Jeder ihrer Teilfolgen ist konvergent.

Lösung:
(a) ist nicht richtig, da unsere Folge eine Teilfolge hat die gegen Unendlich geht: $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ (diese wird aus den Folgengliedern mit ungeradem Index gebildet.)
(b) Diese Folge hat auf jeden Fall zumindest eine konvergente Teilfolge, nämlich $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$. Jedoch ist dies nicht die einzige konvergente Teilfolge.
(c) Diese Antwortmöglichkeit ist richtig, da die konvergente Teilfolge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$ weitere konvergente Teilfolgen enthält (zum Beispiel wenn man jedes 4. Folgenglied wählt). Man könnte auch den Startwert verändern oder endlich viele Glieder mit geradem Indizes zu dieser Teilfolge hinzufügen, da dies die Konvergenz nicht beeinträchtigt.
(d) Die Teilfolge $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ ist nicht konvergent.