Lösungsvorschlag zur Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt

für 21.04.2020

$\boxed{4}$ Konvergenz von Reihen

1. Untersuche, ob die beiden Reihen konvergieren. Falls ja, konvergieren sie auch absolut?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{(n)}}$$

Lösung:

(a) Zur Überprüfung, ob die Reihe absolut konvergiert verwenden wir den Wurzeltest. Wir entscheiden uns für den Wurzeltest, da die Potenz n darauf hindeutet, dass dieser Test zielführend sein könnte. Dazu betrachten wir

$$\sqrt[n]{\left| \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \right|} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}}. \tag{*}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir den Grenzwert (*)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ absolut. Insbesondere konvergiert sie auch.
Eine alternative, besonders elegante Lösung zur Überprüfung der Konvergenz der Reihe, ist es hier die geometrische Reihe als konvergente Majorante anzugeben. Wir schätzen die a_n folgendermaßen ab:

$$|a_n| = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \leq \left(\frac{n}{2n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Wie wir sehen, ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ eine geometrische Reihe und konvergiert daher absolut. Somit ist sie eine konvergente Majorante und es konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ absolut.

(b) Da hier mit $b_n := \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ eine alternierende Folge vorliegt, überprüfen wir die Konvergenz der Reihe mittels Leibnizkriterium. Dazu untersuchen wir, ob die Folge $|b_n|$ monoton fallend ist. Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}| &\leq |b_n| \\
\Leftrightarrow \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}} &\leq \frac{1}{n-\sqrt{n}} \\
\Leftrightarrow n-\sqrt{n} &\leq n+1-\sqrt{n+1} \\
\Leftrightarrow -\sqrt{n} &\leq 1-\sqrt{n+1} \\
\Leftrightarrow \sqrt{n+1} &\leq 1+\sqrt{n} \\
\overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n+1 &\leq 1+2\sqrt{n}+n \\
\Leftrightarrow 0 &\leq \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Die Folge $|b_n|$ ist also monoton fallend. Nun gilt es noch zu überprüfen, ob $|b_n|$ eine Nullfolge ist. Es gilt

$$\lim_{n\leftarrow\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0.$$

Somit ist $|b_n|$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{(n)}}$.
Doch konvergiert die Reihe auch absolut? Es gilt

$$|b_n| = \frac{1}{n-\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist also eine divergente Minorante für die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{(n)}} \right|$. Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{(n)}}$ konvergiert daher nicht absolut.

2. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt?

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} q^m q^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q^k$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (q^k \cdot q^k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

(c) Beide sind korrekt.

(d) Keine von beiden ist korrekt.

Lösung:
Die richtige Antwort ist (a). Dabei ist das erste Gleichheitszeichen eine Anwendung des Cauchy-Produktes von Reihen (vgl. Proposition 1.4.35.). Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen

$$\sum_{m=0}^{k} q^m q^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} q^k = (k+1)q^k.$$

Beachte hierbei, dass in der Summe $\sum_{m=0}^{k} q^k$ kein Index m vorkommt, weshalb der Term q^k einfach $(k+1)$-mal aufsummiert wird.
Antwort (b) ist nicht korrekt, da man Produkte konvergenter Reihen, im Gegensatz zu Summen, nicht einfach zusammenziehen kann. D.h. im Allgemeinen gilt $\sum a_n \sum b_n \neq \sum(a_n b_n)$. Das wird bereits bei endlichen Summen deutlich. Sei angenommen $q = \frac{1}{2}$. Wir sehen, dass die Aussage bereits für $\sum_{k=0}^{1}(\frac{1}{2})^k$ falsch ist, denn

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) \neq 1+\frac{1}{4}.$$