Lösungsvorschlag zur Aufgabe der Woche
zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 12.5. 2020

1. Seien f und g wie folgt auf ganz $\mathbb{R}$ definiert:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \cdot e^x, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie diese beiden auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.
Lösung: Wir schauen uns zunächst einmal die Funktion f an. Wir behaupten, dass f gleichmäßig stetig ist. Dazu schauen wir uns nocheinmal die Definition an:

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta > 0 \text{ sodass } \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{1+y^2-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \left| \frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \\ &= |y-x| \cdot \frac{|y+x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq ... \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den Zähler des zweiten Faktors genauer:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq \begin{cases} x^2+y^2 & \text{falls } |x| \geq 1, \; |y| \geq 1 \\ 1+y^2 & \text{falls } |x| \leq 1, \; |y| \geq 1 \\ x^2+1 & \text{falls } |x| \geq 1, \; |y| \leq 1 \\ 2 & \text{falls } |x| \leq 1, \; |y| \leq 1 \end{cases}$$

Vergleichen wir nun Zähler und Nenner, sehen wir, dass dieser Term nie größer als 2 werden kann. Dies sieht man im zweiten und dritten Fall durch kürzen besonders gut. Die anderen Fälle folgen durch Ausmultiplizieren des Nenners. Somit haben wir:

$$... \leq 2 \cdot |y-x| < 2 \cdot \delta$$

Jetzt sehen wir wie δ gewählt werden muss, nämlich $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt die Stetigkeit.

Betrachten wir nun die Funktion g. Untersuchen wir g auf Stetigkeit. Für $x \neq 0$ ist unsere Funktion stetig, da wir wissen, dass $x \cdot e^x$ und 0 beide stetig sind. Wir müssen noch überprüfen ob die beiden Funktionen im Punkt 0 übereinstimmen. Dies ist auch der Fall, da $\lim_{x \to 0} x \cdot e^x = 0$. Nun behaupten wir, dass g nicht gleichmäßig stetig ist. Das heißt:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ sodass } \forall \delta > 0\ \exists\ x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Wählen wir dazu $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$ beliebig. Wir setzen $x > 0$ und wählen dann $y = x + \frac{\delta}{2}$, sodass $|x - y| < \delta$ erfüllt ist. Damit erhalten wir:

$$|g(x) - g(y)| = (x + \frac{\delta}{2})e^{x+\frac{\delta}{2}} - xe^x = x\left(e^{x+\frac{\delta}{2}} - e^x\right) + \frac{\delta}{2}e^{x+\frac{\delta}{2}} \geq ...$$

Wenn wir uns die rechte Seite ansehen ist es klar, dass der erste Summand auf jeden Fall größergleich als Null ist. Da $\lim_x \to \infty e^x = \infty$ existiert auf jeden Fall ein x mit $\frac{\delta}{2}e^{x+\frac{\delta}{2}} > 1$

$$... \geq \frac{\delta}{2}e^{x+\frac{\delta}{2}} > 1$$