Lösung der Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt

für 29.06.2020

1. **Differenzieren**
   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. Bestimmen Sie die Maxima und Minima von f.
   Lšung: Wir wissen, dass eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwerts folgende Eigenschaft ist: $f'(x) = 0$. Wir bemerken zunächst, dass unsere Funktion auf dem gesamten Gebiet der reellen Zahlen definiert ist und stetig ist und berechnen uns die Ableitung.

   $$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' = \left(\left(x^2+x+1\right)^{-1}\right)' = (-1)\cdot(x^2+x+1)^{-2}\cdot(2x+1) = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

   Nun müssen wir herausfinden an welchen Stellen diese Funktion Nullstellen hat. Wir bemerken, dass auch die Funktion auf den gesamten reellen Zahlen definiert ist, da der Nenner nicht Null werden kann. Somit brauchen wir nur den Fall betrachten bei der Zähler Null wird.

   $$-2x - 1 = 0 \iff x = \frac{-1}{2}$$

   Wir wissen, dass wir an der Stelle $x = \frac{-1}{2}$ den einzigen Extremwert unserer Funktion haben und verwenden die zweite Ableitung um herauszufinden ob es ein Maximum oder ein Minimum ist.

   $$f''(x) = \left(\frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}\right)' = \frac{(-2)\cdot(x^2+x+1)^2 - (-2x-1)\cdot(2x+1)\cdot 2}{(x^2+x+1)^4} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^4}$$

   $$f''\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{32}{9}$$

   Da dieser Wert negativ ist handelt es sich um ein Maximum.

2. **Limes**
   Lösen Sie folgenden Ausdruck:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x}$$

   Da es sich bei diesem Ausdruck um einen unbestimmten Ausdruck $(\frac{0}{0})$ im Limes handelt werden wir die Regel von de L'Hospital verwenden um die Aufgabe zu lösen.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{1} = cos(0) = 1$$

3. **Intergration**
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx$$

Bei diesem Integral handelt es sich um ein Produkt von Funktionen welches integriert werden sollte. In so einem Fall müssen wir partiell integrieren.

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = \left[(-6x^2+4)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -12x\cdot e^x dx$$
$$= \left[(-6x^2+4)e^x\right]_0^1 - \left([-12xe^x]_0^1 - \int_0^1 -12e^x dx\right)$$
$$= \left[(-6x^2+4)e^x\right]_0^1 - \left([-12xe^x]_0^1 - [-12e^x]_0^1\right)$$
$$= ((-6+4)e-4) - (-12e-0) + (-12e+12)$$
$$= -2e+8$$