Aufgabensammlung
Analysis in einer Variable für das Lehramt

Roland Steinbauer

Sommersemester 2020

> Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.
>
> *J. W. Goethe (1749–1832)*

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zur Analysis in einer Variable für das Lehramt*. Die hier zusammengestellten Aufgaben dienen der Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung, nur dann, wenn sie *eigenständig* durchgedacht und bearbeitet bzw. gelöst werden[1]!

Die Aufgaben sind eng auf die Vorlesung zugeschnitten und speziell für die *fachliche* Ausbildung im *Lehramtsstudium* konzipiert. Zusätzlich zur üblichen Mischung aus

- „Routineaufgaben" (kürzer, einfacher, stellen technisches Basisverständnis her) und
- „Tiefenaufgaben" (länger, aufwendiger, betreffen inhaltliche Aspekte der Begriffe, die sich erst durch eigenständiges Denken/Arbeiten erschließen)

enthält diese Sammlung daher auch

- *Schnittstellenaufgaben*[2], die gezielt Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herstellen, um es den Studierenden zu erleichtern, sinnstiftende Verbindungen zwischen diesen beiden „Welten" aufzubauen.

Außerdem treten immer wieder

- *Multiple Choice-Aufgaben* auf, die dazu herausfordern (sollen) genau zu diskutieren, *warum* eine Antwortmöglichkeiten richtig oder faslch ist.

Viel Vergnügen und Erfolg auf Ihrer Reise durch das Gebiet der Analysis!

[1] Mathematik ist kein Zuschauersport, vgl. (Schichl, Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten*, Springer 2018), Abschnitt 1.2.3.

[2] Das Konzept der Schnittstellenaufgaben und -module geht auf Thomas Bauer zurück, siehe etwa (Bauer, Partheil, *Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik*, Math. Semesterber. 56, 85-103, 2009) und (Bauer, *Schnittstellenaufgaben als Ansatz zur Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. WTM-Verlag.)

Blatt 0: EMA—Da Capo![1]

$\boxed{1}$ *Betrag und Ungleichungen.*

(a) Wiederhole die Definition des (Absolut-)Betrags einer reellen Zahl (siehe etwa [EMA, Def. 6.4.11]) und skizzieren den Graphen der Betragsfunktion.

(b) Löse folgende Ungleichungen rechnerisch, skizziere die Situation aber auch graphisch.

(i) $|3x+4| \leq |x+8|$

(ii) $3 - \frac{x+1}{x-2} < \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$

(iii) $|3x^2 - 8x - 7| \leq 4$

$\boxed{2}$ *Betrag, Maximum und Minimum.* Zeige folgende Identitäten für $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$,

(b) $\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ und

(c) $\max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b|$.

$\boxed{3}$ *Verkehrte Dreiecksungleichung*[2]. Zeige die beiden Ungleichungen

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a \pm b|.$$

Hinweis: Verwende die (richtige) Dreiecksungleichung und die Tatsache, dass aus $x \leq y$ und $-x \leq y$ schon $|x| \leq y$ folgt.

$\boxed{4}$ *ε-Umgebung.* Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$ definieren wir die (offene) ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ als das offene Intervall

$$U_\varepsilon(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Es gilt, dass x genau dann in $U_\varepsilon(x_0)$ liegt, falls sein Abstand zu x_0 kleiner ε ist also

$$x \in U_\varepsilon(x_0) \;\Leftrightarrow\; |x - x_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

(a) Skizziere $U_\varepsilon(x_0)$ für $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/10$ sowie für $x_0 = -1$, $\varepsilon = 1/100$.

(b) Gib einen formalen Beweis von Aussage (1).

[1] Der Ausruf „Da capo!" ist eine Beifallsbekundung durch ein Publikum. Das Stück war so gut, dass man es am liebsten noch einmal von Beginn an hören würde.

[2] Diese Ungleichung wird in der Vorlesung benötigt—Achtung gefährliche Drohung!

$\boxed{5}$ *Schranken—Supremum und Infimum.* Wir gehen von folgender Definition von Supremum (Infimum) für Teilmengen von $\mathbb{R}$ aus (vgl. [EMA, Def. 4.2.32]): Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von A, falls

(i) a obere (untere) Schranke von A ist und

(ii) jedes a' mit $a' < a$ ($a' > a$) nicht obere (untere) Schranke von A ist.

Mache dir diese Definition graphisch klar und löse dann folgende Aufgaben:

(a) Bestimme (falls sie existieren) obere und untere Schranken, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum der folgenden Mengen:

$$A = [0, 1), \quad B = \{1 + (-1)^n |\ n \in \mathbb{N}\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x-5} \geq 5\}.$$

(b) Wie oben nur schwieriger:

$$D = \{\frac{x}{x+1} |\ x \geq 0\}.$$

Tipp: Mache dir die Situation graphisch (etwa durch Plotten der Funktion) klar, um zu einer Vermutung (vor allem über das Supremum) zu gelangen. Diese versuche dann zu beweisen indem du die beiden Punkte in der Definition extra angehst.

(c) Beweise dass, die Sprechweise von *dem* Supremum gerechtfertigt, dieses also eindeutig bestimmt ist. Genauer zeige: das Supremum einer nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Tipp: Wie bei Eindeutigkeitsbeweisen oft zielführend, nimm an, es gebe ein zweites Supremum. Dann lässt sich mittels Punkt (ii) in der Definition ein Widerspruch basteln—gar nicht so schwer.