Blatt 1: Wachstum, Archimedes und Folgen

$\boxed{1}$ *Wachstum, 1.*

(a) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ die Ungleichung[1]

$$n^2 \leq 2^n \text{ gilt.}$$

(b) Aufgabe (a) besagt, dass ab $n \geq 4$ die Potenz n^2 langsamer wächst als das Exponential 2^n. Nun beweisen wir, dass das Exponential 2^n (wiederum für geeignet große n) seinerseits von der Fakultät $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ dominiert wird. Der langen Rede kurzer Sinn: Beweise, dass für alle $n \geq 4$

$$2^n < n! \quad \text{gilt.}$$

$\boxed{2}$ *Darstellung von Folgen, 1.*
Stelle die drei beteiligten Folgen auf Aufgabe $\boxed{1}$

$$a_n = n^2, \quad b_n = 2^n \quad \text{und} \quad c_n = n!$$

graphisch durch ihren Graphen dar, vgl. Vo. 1.2.4. Überzeuge dich von der Korrektheit der Aussagen in Aufgabe $\boxed{1}$
Hinweis: Hier ist die Verwendung von Hilfsmitteln aus der EDV nicht nur erlaubt, sondern explizit erwünscht. Möglichkeiten sind *GeoGebra* (Befehl: Folge(⟨Ausdruck⟩, ⟨Variable⟩, ⟨Startwert⟩, ⟨Endwert⟩), *Mathematica* (Befehle Table, bzw. RecurrenceTable und ListPlot) oder Folgenplotter im www.

$\boxed{3}$ *Anwendung der Archimedischen Eigenschaft.*
Betrachte die Menge

$$B := \{1 - \frac{1}{n} : \ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Wie sieht die Menge B aus? Skizziere sie!
Zeige, dass sie beschränkt ist und errate ihr Supremum.

(b) Beweise, dass du richtig geraten hast.

$\boxed{4}$ *Schnittstellenaufgabe[2]: Reiskörner, Halbierungswachstum & geometrische Reihe, 1.*

Folgen sind auch ein Thema in der Schulmathematik und finden sich so auch in Schulbüchern. Besonders beliebt ist eine Folge, die auch in der Analysis insgesamt und daher auch in der Vorlesung eine große Rolle spielt. Mit ihr befassen wir uns in dieser Aufgabe.

[1]Sie wird in der Vorlesung benötigt—Wieder eine gefährliche Drohung!

[2]Das Konzept der Schnittstellenaufgaben geht auf Thomas Bauer zurück, siehe etwa `http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-19222`.

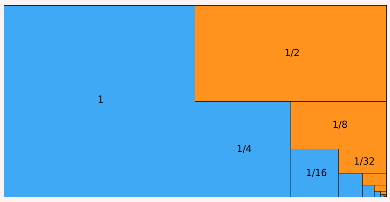
Zu diesem Zweck schauen wir uns zwei, zunächst wenig verwandt ausschauende Ausgangsbeispiele an, mit denen das Thema in der Schule oft motiviert wird, vgl. „Neue Wege, Analysis II" (2011), S. 110f. Vielleicht kommen sie dir bekannt vor.

Das Märchen vom Reiskorn und dem Schachbrett

Im alten Persien erzählten sich die Menschen einst dieses Märchen: Es war einmal ein kluger Höfling, der seinem König ein kostbares Schachbrett schenkte. Der König war über den Zeitvertreib sehr dankbar und so sprach er zu seinem Höfling: „Sage mir, wie ich dich zum Dank für dieses wunderschöne Geschenk belohnen kann. Ich werde dir jeden Wunsch erfüllen." „Nichts weiter will ich, als dass Ihr das Schachbrett mit Reis auffüllen möget. Legt ein Reiskorn auf das erste Feld, zwei Reiskörner auf das zweite Feld, vier Reiskörner auf das dritte, acht auf das vierte und so fort." Der König war erstaunt über soviel Bescheidenheit und ordnete sogleich die Erfüllung des Wunsches an. Sofort traten Diener mit einem Sack Reis herbei und schickten sich an, die Felder auf dem Schachbrett nach den Wünschen des Höflings zu füllen. Bald stellten Sie fest, dass ein Sack Reis gar nicht ausreichen würde und ließen noch mehr Säcke aus dem Getreidespeicher holen. 64 Felder hatte das Schachspiel. Schon das zehnte Feld musste für den Höfling mit 512 Körnern gefüllt werden. Beim 21. Feld waren es schon über eine Million Körner. Und lange vor dem 64. Feld stellten die Diener fest, dass es im ganzen Reich des Königs nicht genug Reiskörner gab, um das Schachbrett aufzufüllen.

Halbierungswachstum

Aus einem Einheitsquadrat entstehen durch fortgesetze Halbierung jeweils die eingefärbten Rechtecke und Quadrate. Diese werden als Mosaik wie in dem Bild an das Quadrat angelegt.



Basierend auf diesen Texten definieren wir zwei Folgen (r_n) und (a_n), wobei

- (r_n) die Gesamtzahl der Reiskörner auf den Schachbrettfeldern 0 bis n angibt und
- (a_n) den Gesamtflächeninhalt der Rechtecke bis einschließlich der n-ten Iteration.

Weil es die Sache leichter macht, beginnen wir in beiden Fällen bei 0 zu zählen, also beim 0-ten Feld auf dem Schachbrett, bzw. sehen wir das Rechteck mit Flächeninhalt 1 als das 0-te Rechteck an.

So nun endlich zu der Aufgabenstellung:

(a) Drücke für ein $n \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder r_n und a_n jeweils mithilfe des Summenzeichens aus.

(b) Finde und begründe eine geschlossene Formel für r_n und a_n.

(c) Stelle beide Folgen als Graph dar.

$\boxed{5}$ *Darstellung von Folgen, 2.*
Stelle die folgenden Folgen aus Vo. Bsp. 1.2.5 einmal als „Spaziergang in $\mathbb{R}$“ und einmal durch ihren Graphen dar (siehe Vo. 1.2.4).
Hinweis: Für die Graphen beachte den Hinweis in Aufgabe $\boxed{2}$. Für den „Spaziergang in“ kann ebenfalls z.B. Geogebra (siehe etwa `https://www.geogebra.org/m/FAPX7M7Q`) oder *Mathematica* verwendet werden.

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine“)

(b) $b_n = \frac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \frac{n}{2^n}$

(d) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

(e) $d_n = x^n$ für ein beliebiges aber fixes $x \in \mathbb{R}$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von x?

(f) $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k$ (Geometrische Reihe)
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von x?

$\boxed{6}$ *Veranschaulichung von Folgen, 3.*
Stelle die Graphen der folgenden Folgen dar:

(a) $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in N$. Wie ändert sich das Aussehen abhängig von k?

(b) $b_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (c) $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (d) $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

(e) Was haben Aufgaben $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ mit den Aufgaben (a) und (b) zu tun? Genauer: Welches Verhalten von a_n und b_n kann auf Basis von $\boxed{1}$ & $\boxed{2}$ erwartet werden? In Analogie: Was sagt das Verhalten von c_n über das relative Wachstum von $n!$ und n^n aus?

$\boxed{7}$ *Wachstum, 2.*
Zeige, dass für alle $1 \leq n \in \mathbb{N}$ die folgenden Abschätzungen gelten

(a) $\displaystyle \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$

Anleitung: Hier ist geschicktes Rechnen *und* Durchhaltevermögen gefragt. Um es dir letzeres zu erleichtern ein paar Hinweise zu ersterem: Für (a) verwende die geschlossene Formel für den Binomialkoeffizienten und (geschickt!) die Darstellung der Fakultät durch ein Produkt. Für die erst Ungleichung in (b) bietet sich die Verwendung des Binomischen Lehrsatzes und die von (a) an. Für die zweite Ungleichung in (b) lassen sich die Fälle $n < 4$ per Hand erledigen. Für den Rest ziehe Aufgabe 1 und (wiedereinmal) die geometrische Summenformel heran.