Blatt 10: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 2

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaugfgabe: Tangente explizit.*
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P. Fertige eine Skizze an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

$\boxed{2}$ *Die Tangente als „beste" Gerade—warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?*
Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der besonderen Eigenschaft des ,,Fehlers" $\frac{r(h)}{h} \to 0$ aus Vo. Thm. 3.1.21 zu tun hat, vgl. auch Bem. 3.1.22.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeige bzw. bearbeite nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ ist von der Form $g(x) = f(\xi) + \alpha(x - \xi)$.

(b) Gib den Fehler $r(h) = f(\xi + h) - g(\xi + h)$ der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und α an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in ξ ist.

(d) Es gilt $\frac{r(h)}{h} \to 0$ $(h \to 0)$ genau dann, wenn g die Tangente an f in ξ ist (d.h. falls $\alpha = f'(\xi)$ ist).

(e) Fertige eine Skizze an.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Differenzierbarkeit des Betrags, etc.*
Welche Argumentation ist korrekt? Begründe!

(1) Die Funktion $x \mapsto |x|^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist differenzierbar, weil $x \mapsto |x|$ diffbar ist.

(2) Sie ist nicht differenzierbar, weil $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist.

(3) Sie ist differenzierbar, obwohl $x \mapsto |x|$ nicht differenzierbar ist.

(4) Keine der Aussagen ist korrekt.

$\boxed{4}$ *Differenzierbarkeit 4 — etwas ambitionierter.*
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, für welche x sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = e^{\sin(x)}$ (b) $f_2(x) = \cos(\log(x))$
(c) $f_3(x) = \sin(e^{x^2})$ (d) $f_4(x) = \log\sqrt{1 + \sin^2(x)}$
(e) $f_5(x) = \sin^2\big(x^3 + \cos(x^2)\big)$ (f) $f_6(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2(\sqrt{x})}$

$\boxed{5}$ *Differenzieren.*
Berechne die Ableitungen der Funktionen $f_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $a > 0$, eine fixe Zahl. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = a^x$	(b) $f_2(x) = x^a$	(c) $f_3(x) = x^x$
(d) $f_4(x) = x^{(x^x)}$	(e) $f_5(x) = (x^x)^x$	(f) $f_6(x) = x^{(x^a)}$
(g) $f_7(x) = x^{(a^x)}$	(h) $f_8(x) = a^{(x^x)}$	(i) $f_9(x) = a^{(a^a)}$

$\boxed{6}$ *Stetig differenzierbar?*
Gegeben sind die Funktionen, vgl. Vo. 3.1.32(iii), (iv)

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, d.h. dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und die Ableitungsfunktion $x \mapsto f'(x)$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Ist f zweimal differenzierbar? Skizziere g und g'.

(b) Zeige, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist[1]. Ist g' auch stetig auf $\mathbb{R}$? Skizziere g und g' und, wo möglich f''.

Achtung: Natürlich liegt der Hund in $x = 0$ begraben. Dort hilft uns *nur* die Definition der Differenzierbarkeit!

$\boxed{7}$ *Knicke und Sprünge.*

(a) Betrachte die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizziere den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Was kann über die einseitigen Ableitungen bei $x = 0$ gesagt werden?

(b) Betrachte die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizziere den Funktionsgraphen, dann verifiziere die folgenden Aussagen

(i) H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
(ii) H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
(iii) Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
(iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.
(v) Allerdings existiert die linksseitige Ableitung von H in $x = 0$, die rechtsseitige aber nicht.

[1] Sogar mit beschränkter Ableitung g'.

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Geglättete Knicke.*

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^{n+1} & x \geq 0. \end{cases}$

Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar aber nicht $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Skizziere die Situation für $n = 4$.

Tipp: Der Schlüssel ist hier eine Formel für $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots n+1,\ x > 0)$: $f^{(k)}(x) = (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2)x^{n+1-k}$ (unmittelbar einsichtig oder leichte Induktion). Damit lässt sich zeigen, dass $f^{(k)}(0)$ für $k = 1, 2, \ldots n$ existiert und verschwindet und dass $f^{(n+1)}(0)$ nicht existiert.