Blatt 11: Eigenschaften differenzierbarer Funktionen, 1

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaufgabe: Kurvendiskussion.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen. Das Verwenden elektronischer Hilfsmittel ist hier explizit erwünscht!

(a) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ (b) $x \mapsto x\,e^{-1/x}$

$\boxed{2}$ *Lokales und globales Maximum.*
Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n\,e^{-x}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass f an einer einzigen Stelle, nämlich $x = n$ ihr globales Maximum annimmt und dies auch das einzige lokale Maximum von f ist. Bearbeite dazu die folgenden Punkte.

(a) Um dir einen Überblick zu verschaffen, skizziere den Graphen von f (für ein geeignetes n).
(b) Weil $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ (Beweis!) existiert R sodass $f(x) < 1/e$ für alle $x > R$.
(c) Falls daher f ein globales Maximum in $\xi \in \mathbb{R}$ hat, muss $\xi \in [0,R]$ gelten und es gibt tatsächlich ein solches ξ.
(d) ξ muss sogar in $(0,R)$ liegen und daher ist Vo. Prop. 3.2.4 anwendbar.
(e) Berechne ξ und zeige, dass es der einzige Punkt mit diesen Eigenschaften ist.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Formulierungen des Mittelwertsatzes.*
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Welche der folgenden Formulierungen gibt die Aussage des Mittelwertsatzes korrekt wieder?

(1) Es gibt eine Stelle ξ zwischen a und b, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich dem Abstand zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ist.
(2) Es gibt eine Stelle ξ zwischen a und b, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.
(3) Es gibt eine Stelle ξ zwischen a und b, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(\xi, f(\xi))$ ist.
(4) (1) und (2) sind korrekt.

$\boxed{4}$ *Verständnisaufgabe: Mittelwertsatz.*
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Was kann man über f mit Sicherheit behaupten?

(1) Es gibt ein $\xi \in [0,1]$ mit $f'(\xi) = 0$.

(2) Es gibt ein $\eta \in [0,1]$ mit $f'(\eta) = 1$.

(3) Es gibt sowohl ein solches ξ als auch ein solches η.

(4) Es muss weder ein solches ξ noch ein solches η geben.

$\boxed{5}$ *Zum Satz von Rolle und seinen Voraussetzungen.*
Wie in Vo. Bem. 3.2.11 diskutiert, sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle — und damit auch für den MWS — für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, nämlich f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), teilweise redundant und können zu f differenzierbar auf (a,b) und f stetig in a und b umformuliert werden. Diese Voraussetzungen sind gemeinsam mit $f(a) = f(b)$ aber notwendig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Finde Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f differenzierbar auf (a,b), $f(a) = f(b)$, aber $\nexists\, \xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, aber es gibt kein ξ mit $f'(\xi) = 0$.

(c) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) = f(b)$ aber es gibt kein ξ mit $f'(\xi) = 0$.

$\boxed{6}$ *Globale Maxima.*
Bestimme alle globalen Maxima der Funktion

$$f(x) = \Big(3 + 4(x-1)^2\Big)\, e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gibt es auch globale Minima? Warum bzw. warum nicht?
Tipp: Gehe wie in Aufgabe $\boxed{2}$ vor.

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: Kurvendiskussion 2.*
Bestimme für die folgenden Funktionen den (maximal möglichen) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten, lokale Extrema, Bereiche von Konvexität und Wendepunkte sowie Grenzwerte gegen den Rand des Definitionsbereichs bzw. gegen $\pm\infty$. Skizziere den Funktionsgraphen. Das Verwenden elektronischer Hilfsmittel ist wieder explizit erwünscht!

$$(a) \quad x \mapsto \log(x)/x \qquad\qquad (b) \quad x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2} \qquad (2)$$

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Noch eine Verständnisaufgabe zum MWS.*
Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Angenommen, wir wissen, dass die beiden Funktionen an den Randpunkten des Intervalls übereinstimmen, d.h. es gilt $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Was kann man daraus folgern?

(1) Es gibt eine Stelle $\xi \in [a,b]$, an der die Tangenten an f und g dieselbe Steigung haben.

(2) Es gibt eine Stelle $\xi \in [a,b]$, an der die Tangenten an f und g verschiedene Steigungen haben.

(3) Man kann beides folgern.

(4) Man kann keines von beiden folgern