Blatt 14: Vermischtes zum Differenzieren & Integrieren.

1 *Regeln von de L'Hospital, praktisch 2.*
Berechne $(a, b \in \mathbb{R})$:

(a) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x}$

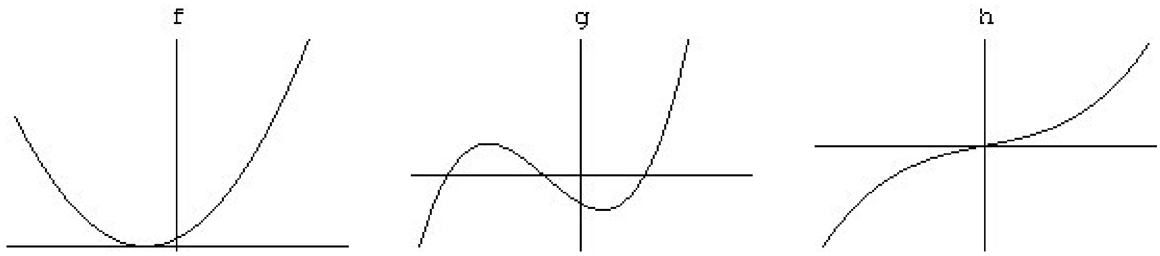
(d) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)$ (f) $\displaystyle\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$

2 *Regeln von de L'Hospital—eine Warnung.*
Berechne $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

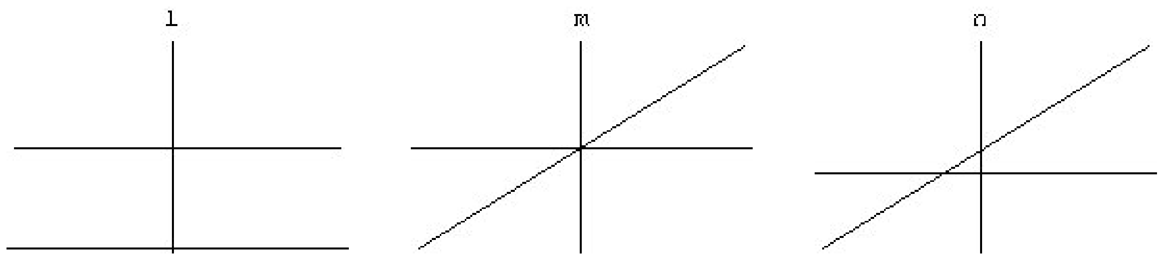
Tipp: Die Regel von de L'Hospital führt hier nicht zum Ziel (warum?). Hebe e^x heraus.

3 *Kurvendiskussion 4.*
Sei $a > 0$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 4ax^3$. Untersuche p bezüglich Nullstellen, Monotonie und Extrema. Fertige eine Skizze des Funktionsgraphen an.

4 *Schnittstellenaufgabe: Ableitungspuzzle 2.*
Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



Welche der Funktionen l, m, n (Graphen siehe unten) ist die zweite Ableitung von f g, bzw. h? Warum?



$\boxed{5}$ *Verständnisaufgabe: Stetig, monoton, integrierbar?*
Welches der folgenden Diagramme gibt die Inklusionen zwischen der Menge der stetigen Funktionen, der Menge der monotonen Funktionen und der Menge der integrierbaren Funktionen korrekt wieder? Begründe!

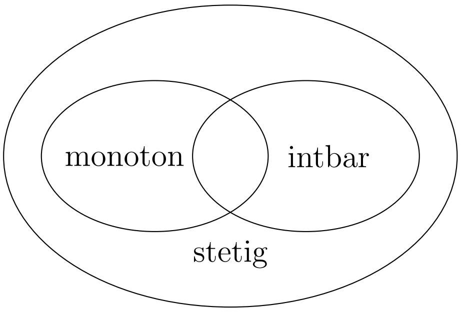


Diagramm A

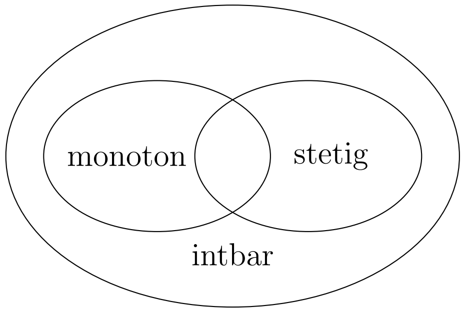


Diagramm B

(1) Diagramm A,

(2) Diagramm B,

(3) beide sind korrekt,

(4) keines von beiden ist korrekt.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Stammfunktionen des Cosinus.*
Welche der Ausagen über Sinus und Cosinus sind korrekt, welche nihct? Begründe!

(1) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos.

(2) sin ist die einzige Stammfunktion zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 hat.

(3) Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu cos, die im Nullpunkt den Wert 0 haben.

(4) Keine dieser Aussagen ist wahr.

$\boxed{7}$ *Integration, explizit, 2.*
Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\log(x)}$

Tipp:
Setze $u = \log(x)$.

(f) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

Tipp:
Setze $x = 2\tan(z)$.

$\boxed{8}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Nicht-verschwindendes Integral stetiger Funktionen.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion aber nicht die Nullfunktion. Zeige, dass dann

$$\int_a^b |f(t)| \, dt \not> 0$$

gilt. Fertige eine Skizze an!

Hinweis. Verwende Vo. Lemma 2.1.10, das besagt, dass eine stetige Funktion f, die in einem Punkt ξ nicht verschwindet, schon auf einer ganzen Umgebung $U_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ nicht verschwindet. Genauer kann man – wie der Beweis von $\boxed{2}$ 1.10. zeigt – erreichen, dass $|f(x)| > |f(\xi)|/2 > 0$ auf $U_\delta(\xi)$.