Blatt 2: Folgen & Konvergenz

1 *Fingerübung zur Grenzwertdefinition*
Bei der Folgenden Aufgabe geht es darum, Sensibilität im Umgang mit Quantoren und vor allem mit der Reihenfolge von Quantoren zu entwickeln.

Das folgende Zitat wir Abraham Lincoln (1809 – 1861, 16. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika) zugeschrieben:

> „You can fool some of the people all of the time, and all of the people some of the time, but you can not fool all of the people all of the time.“

Übersetze diese drei (Teil-)Aussagen in Quantorensprache.

Tipp: Beginne mit einer verbalen Umformung, der ersten Aussage in etwa in der Form: “Es gibt (mindestens) eine Person p, sodass für alle Zeitpunkte t die Aussage $F(p,t)$ gilt“. Dabei ist $F(p,t)$ die Aussage: „Die Person p kann zum Zeitpunkt t hereingelegt weren.“ Nun Verwende Quantoren...

2 *Die Macht von $\frac{1}{n}$ — Nachtrag.*
Gegeben sind die folgenden beiden Aussagen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \ \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{A}$$

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{B}$$

Was stimmt? Begründe!

(a) Die zwei Aussagen sind äquivalent, und sie sind beide wahr.

(b) Die zwei Aussagen sind äquivalent, und sie sind beide falsch.

(c) Die Aussagen sind nicht äquivalent, und nur (A) ist wahr.

(d) Die Aussagen sind nicht äquivalent, und nur (B) ist wahr.

3 *Konvergenz aus der Definition.*
Zeige direkt aus der Definition des Grenzwerts, dass $a_n = 1/\sqrt{n}$ eine Nullfolge ist.
Tipp: Orientiere dich an Vo. 1.2.11(ii).

$\boxed{4}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 1.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{2n^2+3n}{2n-3n^2}$ (b) $\dfrac{2n^2+3n}{2n-2n^3}$ (c) $\dfrac{2n^3+3n}{3n-2n^2}$

(d) Formuliere deine Rechenerfahrung aus (a)–(c) in einer allgemeinen Aussage.

$\boxed{5}$ *Divergenz der Vorzeichenmaschine—Da Capo.*
In Vo. $\boxed{1}$ 2.11(iii) haben wir mittels eines indirekten Beweises gezeigt, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert. Zeige dieses Resultat nun direkt aus der Definition (durch Finden von Versager-ε's).

$\boxed{6}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 2.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ (b) $\dfrac{1+2\cdot 3^n}{5+4\cdot 3^n}$ (c) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k-2)}{n^3+2n}$

$\boxed{7}$ *Alternative Formulierungen der Konvergenz?*
Sei (x_n) eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Sind die folgenden Aussagen äquivalent zu $x_n \to x$? Argumentiere, gib einen Beweis oder finde ein Gegenbeispiel.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| \leq \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_{2n} - x| < \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \ |x_n - x| < \varepsilon$

(e) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(f) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

(g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \ |x_n - x| < 2\varepsilon$

$\boxed{8}$ *Nochmals Archimedes.*
Wie in Vo. $\boxed{1}$ 2.11(ii) bemerkt, ist die Tatsache, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ eine unmittelbare Folge aus der Archimedischen Eigenschaft. Es gilt aber auch die Umkehrung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Archimedische Eigenschaft.}$$

Finde einen Beweis für diese Behauptung.

[1]Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels Geogebra oder Mathematica zu überprüfen. Tatsächlich besteht die Aufgabe aber darin, den Grenzwert *händisch* zu berechnen.

$\boxed{9}$ *Schnittstellenaufgabe: Verbale Umformulierungen der Grenzwertdefinition.*
Im Schulkontext ist es wichtig, *gute* verbale Umformulierungen der Grenzwertbedingung zu verwenden. Insbesonders müssen Lehrer*innen richtige von falschen Schüler*innenäußerungen unterscheiden können.

Diskutiere daher welche der folgenden Umformulierungen der Grenzwertdefinition für eine reelle Folge zutreffend sind. Begründe oder gib ein Gegenbeispiel!

Eine Folge x_n konvergiert gegen x, falls

(a) sie sich x immer mehr annähert.

(b) sie sich x immer mehr annähert, ohne x je zu erreichen.

(c) sie x schließlich beliebig nahe kommt.

(d) in einer ε-Umgebung von x alle Folgenglieder x_n liegen.

(e) in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder x_n liegen.

(f) in einer ε-Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n liegen.

(g) in jeder ε-Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n liegen.