Blatt 3: Folgen & Konvergenz, Teil 2

$\boxed{1}$ *Schnittstellenaufgabe: Reiskörner, Halbierungswachstum & geometrische Reihe, 2.*
Wir kehren zu Aufgabe $\boxed{4}$ von Blatt 1 zurück, d.h. zur Geschichte von den Reiskörnern und zum Halbierungswachstum. Greife auf die dort in Aufgabenteil (a) gefundenen Summendarstellungen der Folgen (r_n) und (a_n) zurück und bearbeite die folgenden Aufgaben:

(a) Formuliere aufgrund der in Aufgabe $\boxed{4}$ (c), Blatt 1 erstellten Graphen für (r_n) und (a_n) Vermutungen über den Grenzwert der beiden Folgen.

(b) Zeige mittels Rückgriff auf Vorlesung 1.2.37, dass deine Vermutungen richtig waren.

(c) Greife nun auch auf Aufgabe $\boxed{4}$ (b), Blatt 1 und die dort gefundenen geschlossenen Darstellungen von (r_n) und (a_n) zurück. Überprüfe direkt an diesen Darstellungen, dass die Grenzwerte aus (b) korrekt sind.

Hinweis: Wenn du in Aufgabe $\boxed{4}$ (b), Blatt 1 effizient vereinfacht hast, dann ist deine Argumentation in (c) ein Spezialfall des Beweises von 1.2.37 aus der Vorlesung.

$\boxed{2}$ *Verständnisaufgabee zur Grenzwertdefinition, 1.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Für die Folge $(\frac{1}{1000}, 0, \frac{1}{1000}, 0, \frac{1}{1000}, \dots)$ gilt:

(1) Alle Folgenglieder liegen in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(0)$, wenn man $\varepsilon := 1/100$ wählt, daher ist sie konvergent.

(2) In jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(0)$, liegen fast alle Folgenglieder, daher ist sie konvergent.

(3) Es gibt eine ε-Umgebung von 0, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen, daher ist sie nicht konvergent.

(4) Es gibt eine ε-Umgebung von 0, in der nicht fast alle Folgenglieder liegen, daher ist sie nicht konvergent.

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabee zur Grenzwertdefinition, 2.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Die Folge $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$

(1) ist eine Nullfolge, weil alle Folgenglieder gleich 0 sind,

(2) ist eine Nullfolge, weil ab einem gewissen Index alle Folgenglieder gleich 0 sind,

(3) ist eine Nullfolge, weil es ein Folgenglied gibt, das gleich 0 ist,

(4) ist eine Nullfolge, obwohl kein einziges Folgenglied gleich 0 ist.

$\boxed{4}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 3.*
Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, bestimme ihren Grenzwert[1].

(a) $\sqrt{n^2+n}-n$ (b) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$ (c) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

Tipp: Zunächst stelle fest, dass immer Differenzen von bestimmt divergenten Folgen auftreten und daher nach Vo. 1.2.46 keine allgemeine Hilfe zu erwarten ist. Der Trick besteht nun darin, den Ausdruck zu einem Bruch zu erweitern, indem man die Differenz mit der analogen Summe multipliziert. Dann erhält man mittels $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ im Zähler eine Differenz, die besser zu bearbeiten ist und im Nenner eine Summe.

$\boxed{5}$ *Linearkombination konvergenter Reihen.*
Beweise Vo. $\boxed{1}$ Prop. 2.39. Genauer zeige, dass für die konvergenten Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ sowie $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k+\mu b_k) \;=\; \lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_k \;+\; \mu\sum_{k=0}^{\infty}b_k.$$

Tipp. Wende Vo. $\boxed{1}$ 2.25 (Linearkombination konvergenter Folgen) auf die Partialsummen an. Dann ist der Beweis ganz einfach!

$\boxed{6}$ *Der Folgenanfang ist wirklich egal.*
Betrachte die Folgen ($n\geq 1$)

$$a_n=\sqrt{n+10^3}-\sqrt{n},\qquad b_n=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n},\qquad c_n=\sqrt{n+\frac{n}{10^3}}-\sqrt{n}.$$

(a) Skizziere (plotte) die drei Folgen.

(b) Zeige, dass $a_n>b_n>c_n$ für alle $n<1\,000\,000$.

(c) Berechne die Grenzwerte der drei Folgen.

Hinweis: Die nächsten beiden Aufgaben sind technisch schwieriger als die vorigen. Spucke in die Hände und versuche dich trotzdem an ihnen. Auf gutes Gelingen!

[1] Wie schon gesagt: Um einen Kandidaten für den Grenzwert zu erhalten, plotte die Folge. Außerdem kann es nicht schaden, das Ergebnis mittels GeoGebra, Mathematica etc. zu überprüfen.

$\boxed{7}$ *Konvergenz von Folgen explizit, 4—Achtung: trickreich.*
Hier begegnen uns alte Bekannte aus Aufgabe $\boxed{6}$ von Blatt 1. Aus den dort gezeichneten Graphen haben wir schon Kandidaten für die respektiven Grenzwerte. Jetzt geht es darum diese Konvergenzen auch formal zu zeigen, also: Bestimme die Grenzwerte der folgenden Folgen:

$$\text{(a)} \quad \frac{n^k}{2^n} \quad (k \in N \text{ fix aber beliebig}) \qquad \text{(b)} \quad \frac{2^n}{n!} \qquad \text{(c)} \quad \frac{n!}{n^n}$$

Tipp: Bei (a) besteht der Standardtrick darin, im Nenner $2 = (1 + 1)$ zu schreiben und dann den Binomischen Lehrsatz zu verwenden. Dann schätze geschickt ab, indem du nur den letztem Term im Binomischen Lehrsatz übrig lässt und diesen sogar durch $\binom{n}{k+1}$ nach unten abschätzt; uff! Teil (b) ist verhältnismäßig einfacher zu haben: Schreibe die Terme in Zähler und Nenner aus, à la $2^n = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)n$. Dann schätze die einzelnen Terme im Bruch gegeneinander ab und verwende das Sandwich-Lemma. Die analoge Strategie führt auch bei (c) zum Ziel!

$\boxed{8}$ *Wurzelfolgen—Ein Standardbeispiel, aber wieder trickreich!*

(a) Sei $1 < a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\sqrt[n]{a} \;\to\; 1 \qquad (n \to \infty).$$

Tipp: Bemerke zuerst, dass $\sqrt[n]{a} > 1$ gilt (wegen der Monotonie der Wurzel) und du somit $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$ mit $x_n > 0$ schreiben kannst. Das ist der 1. Trick und somit genügt es $x_n \to 0$ zu zeigen. Um das zu bewekstelligen, schreibe $a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + x_n)^n$ (das ist der 2. Trick) und verwende die Bernoulli-Ungleichung um x_n abzuschätzen. Jetzt brauchst du nur mehr das Sandwich-Lemma...

(b) Zeige, dass

$$\sqrt[n]{n} \;\to\; 1 \qquad (n \to \infty).$$

Tipp: Diese Aufgabe kann mit denselben Tricks wie oben begonnen werden. Allerdings wird dann statt der Bernoulli-Ungleichung eine stärkere Abschätzung benötigt, nämlich $(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, die sich mit Induktion leicht beweisen lässt—das ist aber nicht Teil dieser Aufgabe.