Blatt 6: Funktionen & Stetigkeit

$\boxed{1}$ *Verhalten von Funktionen anschaulich*[1].
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenem von f aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.

(a) $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$

(b) $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$

(c) $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -f(x)$

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + 2$

(e) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(2x)$

(f) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x - a)$

Hinweis. Suche dir ein f aus, an dem der Effekt der jeweiligen Operationen gut sichtbar wird. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

$\boxed{2}$ *Umgebungsstetigkeit*
Zeige direkt aus der Definition der Stetigkeit (Vo. 2.1.6), dass

(a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ -x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $[-1, 1]$ ist.

(b) $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ unstetig in $x_0 = 0$ ist.

Tipp: Schreibe f mit Hilfe der Betragsfunktion und fertige Skizzen an!

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Umgebungsstetigkeit.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$$

stetig ist, kann man direkt mit der ε-δ-Bedingung aus der Vo., Definition 2.1.6

(1) beweisen, indem man dort $\delta = 2\varepsilon$ wählt,

(2) beweisen, indem man dort $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ wählt,

(3) nicht beweisen, da in diesem Fall kein ε gegeben ist,

(4) nicht beweisen, denn man benötigt in diesem Fall das Folgenkriterium, Theorem 2.1.12 aus der Volesung.

[1] Die Wirkung von Parametern (zumindest bei speziellen) Funktionen ist im Grundkompetenzkatalog zur SRDP im Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ etwa in den Punkten FA 2.3, 3.3., 5.3 und 6.3 gelistet.

$\boxed{4}$ *Schnittstellenaufgabe: Verbale Umformulierungen der Stetigkeit.*
Im Schulkontext ist es wichtig, den Stetigkeitsbegriff *gut verbal* formulieren zu können[2]. Insbesonders müssen Lehrer*innen richtige/ungenaue/falschen Formulierungen als solche erkennen bewerten und ggfs. korrigieren können.

Diskutiere unter diesem Gesichtspunkt die folgenden Formulierungen:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig, falls

(1) sich bei kleinen Änderungen von $f(x)$ nahe $f(a)$, auch x nur wenig ändert,

(2) es für jede noch so kleine Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ um den Funktionswert $f(x)$ eine „Sicherheitszone" $U_\delta(a)$ um a gibt, sodass alle x darin nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden,

(3) es für jedes vorgegebene & kleine Sicherheitsintervall $U_\delta(a)$ um a es eine Toleranzgrenze ϵ gibt, sodass die Funktionswerte für $x \in U_\delta(a)$ ε-nahe bei $f(a)$ sind, d.h. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt,

(4) kleine Schwankungen der Argumente um a nur ein kleine Schwankungen der Funktionswerte um $f(a)$ bewirkt,

(5) falls kleine Ursachen nur eine kleine Wirkung haben,

(6) ein kleines „Wackeln" der Argumente nur zu einem kleinen „Wackeln" der Funktionswerte führt.

(7) f konvergente Folgen $x_n \to a$ respektiert, in dem Sinne, dass $f(x_n) \to f(a)$.

$\boxed{5}$ *Grundoperationen für Funktionen anschaulich.*
Analog zu Aufgabe 1 seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wie sehen die Graphen der folgenden Funktionen im Vergleich zu jenen von f und g aus? Veranschauliche deine Aussagen durch Skizzen.

(a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(b) $f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(c) $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

(d) $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(e) $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, wobei $D = \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \neq 0\}$

Hinweis. Suche dir f und g so aus, dass die Effekte der entsprechenden Operationen gut sichtbar werden. Das Experimentieren mit einem Funktionenplotter ist nachdrücklich empfohlen!

[2]Der Punkt „Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können" tritt z.B. im Lehrplan für die AHS-Oberstufe in der 7.Klasse im Kompetenzmodul 6 auf.

$\boxed{6}$ *Stetigkeit der Grundoperationen.*
Beweise die restlichen Fälle von Prop. 2.1.17(i). Genauer zeige, dass für stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$

(a) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $D' := \{x \in D :\ g(x) \neq 0\}$.

Tipp: Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze!

$\boxed{7}$ *Schnittstellenaufgabe: „Bleistifstetigkeit“.*
Eine oft in der Schule anzutreffende intuitive Vorstellung zur Stetigkeit ist:

> Eine Funktion ist stetig, wenn man den Graphen der Funktion, ohne abzusetzen, mit einem Bleistift durchzeichnen kann.

Wir wollen Funktionen mit dieser Eigenschaft vorsichtshalber *bleistiftstetig* nennen.

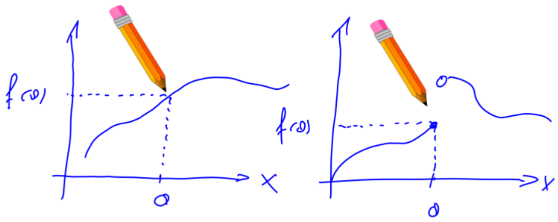

Abbildung 1: Eine bleistiftstetige und eine nicht bleistiftstetige Funktion

Betrachte die folgenden Funktionen[3] und bearbeite die Punkte (i) und (ii):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases} \qquad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(i) Skizziere die Graphen von f, g, h und i und stelle fest, an welchen Stellen sie stetig bzw. unstetig sind. Begründe deine Aussagen (keine Beweise!).
Tipp: für h und i gibt es sehr brauchbare Veranschaulichungen mit Geogebra unter `https://ggbm.at/g7r7KdaQ` bzw. `https://ggbm.at/whZbDSNa`.

(ii) Welche der Funktionen sind bleistiftstetig?
Wenn dir jetzt Zweifel an der einschlägigen Definition kommen: sehr gut! Versuche sie zu präzisieren und so im Lichte der obigen Beispiele möglichst äquivalent zur „echten“ Stetigkeit zu machen.

[3] Wir haben die Sinus-Funktion im Rahmen der Vorlesung noch nicht definiert. Für diese Aufgabe ist es aber ausreichend, dein Schulwissen heranzuziehen.