# Blatt 8: Elementar-transzendente Funktionen

$\boxed{1}$ *Nachtrag zur (Un-)Stetigkeit der Umkehrfunktion.*
Ziel dieser Aufgabe ist es, das Gegenbeispiel in Vorlesung 2.2.18 genau auszuarbeiten. Für die Funktion

$$f : D := [-2, -1) \cup [1, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in [-2, -1) \\ x - 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

bearbeite daher die folgenden Aufgabenstellungen:

(a) Zeichne den Graphen der Funktion.

(b) Warum und wo[2] hat $f$ eine Umkehrfunktion? Gib sie explizit an und zeichne ihren Graphen.

(c) Untersuche die Stetigkeit der Umkehrfunktion.

(d) Warum ist $f$ *kein* Gegenbeispiel zum Umkehrsatz 2.2.19?

$\boxed{2}$ *Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion.*
Wiederhole die Definition der allgemeinen Exponentialfunktion $\exp_a(x) = x^a$ ($0 < x$, $a \in \mathbb{R}$) aus 2.3.4 und beweise die folgenden in Prop. 2.3.6 behaupteten Eigenschaften.

(a) (Funktionalgleichung) $a^{x+y} = a^x\ a^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(b) (Konsistenz mit natürlichen Exponenten) $\exp_a(m) = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

(c) (Konsistenz mit rationalen Exponenten) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z},\ 1 \leq q \in \mathbb{N})$

(d) (Doppeltes Exponential) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \quad (x, y \in \mathbb{R})$

*Hinweis:* Verwende die entsprechenden Eigenschaften von exp und log aus der Vorlesung. Gehe dabei sorgfältig vor und verwende keine (im Rahmen der Vo.) unbewiesenen Formeln (auch wenn du sie vielleicht aus der Schule kennst)!

$\boxed{3}$ *Verständnisaufgabe: Funktionalgleichung für* exp.
Welche der folgenden Gleichungen ist richtig und kann verwendet werden um die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(z + w) = \exp(z)\ \exp(w)$$

herzuleiten/zu beweisen? Begründe deine Antworten!

[2] Soll heißen: Auf welchem Definitionsbereich?

(1) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{z^n}{n!}\dfrac{w^n}{n!}$, (3) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{z^n w^n}{n!}$,

(2) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{k-n}w^{n-k}$, (4) $\dfrac{(z+w)^n}{n!} = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{k}w^{n-k}$.

$\boxed{4}$ *Explizite Grenzwerte.*
Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-x}{|x|}$ (b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

*Tipp:* Verwende 2.3.7[3] und in (a) setze $y = \log(1+x)$.

*Hinweis:* Den Grenzwert in (c) haben wir schon in Aufgabe 3.7(b) (etwas mühsam) berechnet. Insofern ist das Ergebnis bekannt. Hier kannst du (c) aus (b) folgern, was wesentlich kürzer ist!

$\boxed{5}$ *Verständnisaufgabe: komplexe Umgebungen.*
Betrachte die beiden komplexen Umgebungen (vgl. (E4) aus Abschnitt 2.3.1) $U_1(0)$ und $U_1(1-\mathrm{i})$. Welche der folgenden Aufgaben sind korrekt? Begründe deine Antworten! *Tipp:* Skizze!

Die beiden Umgebungen

(1) schneiden sich in genau einem Punkt.

(2) sind disjunkt

(3) schneiden sich in genau 2 Punkten

(4) haben unendlich viele Punkte gemeinsam.

$\boxed{6}$ *Eigenschaften der Winkelfunktionen.*
Zeige jeweils mindestens eine der Formeln aus (a), (b) bzw. (c):

(a) (Doppelwinkelformeln)

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

(b) (Halbwinkelformeln)

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \qquad (x\in[0,2\pi])$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \qquad (x\in[-\pi,\pi])$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \qquad (x\in(-\pi,\pi))$$

[3]Image-Pflege: Sollte die Beliebtheit dieser nützlichen Grenzwerte steigern!

(c) (Produktformeln)
$$\begin{aligned} 2\sin(x)\sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\ 2\sin(x)\cos(y) &= \sin(x-y) + \sin(x+y) \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ *Winkeldreiteilung.*
Zeige die Formel
$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$
*Tipp:* $\cos(x) = (1/2)(e^{ix} + e^{-ix})$.
*Bemerkung.* Mit $\alpha = 3x$ wird aus obiger Formel $4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) = \cos(\alpha)$, sodass die Dreiteilung des Winkels $\alpha$ äquivalent zum Lösen der Gleichung 3. Grades $4t^3 - 3t = \cos(\alpha)$ ist. Durch Betrachten dieser Gleichung kann man zeigen, dass ein allgemeiner Winkel $\alpha$ **nicht** mittels Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann. Aber das ist eine Geschichte der Algebra...

$\boxed{8}$ *Oszillationen.*
Gegeben sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

(a) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $f_2(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f_3(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Skizziere die Graphen von $f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und berechne $\lim_{x\to 0} f_i$.

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Trickkiste — Werte der Winkelfunktionen.*
Berechne **ohne** Taschenrechner (das ist die Herausforderung!) die exakten Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für

(a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ oder verwende die Halbwinkelformeln.

(b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *Tipp:* Setze $z = e^{i\pi/3}$ und verwende $z^3 + 1 = 0$.