NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2020, 1. Termin, 2.7.2020

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/4 Punkt abgezogen, Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls

   (a) in jeder ε-Umgebung von a alle Folgenglieder a_n liegen.

   (b) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a|<\varepsilon \quad \forall n \geq N$.

   (c) $\exists \varepsilon>0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a|<\varepsilon \quad \forall n \geq N$.

   (d) in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder a_n liegen.

2. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Der Audruck $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet

   (a) die n-te Partialsumme $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_m$.

   (b) den Reihenwert im Fall der Konvergenz.

   (c) den Grenzwert $\displaystyle\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$, falls er existiert.

   (d) die Folge der Partialsummen.

3. *(Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls

   (a) für jede reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ auch $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

   (b) $\forall \delta>0 \quad \exists \varepsilon>0: \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a|<\delta$
   $\implies \quad |f(x) - f(a)|<\varepsilon$.

   (c) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0: \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a|<\delta$
   $\implies \quad |f(x) - f(a)|<\varepsilon$.

   (d) es zu jedem „Sicherheitsintervall" $U_\delta(a)$ eine „Toleranz" ε gibt, sodass für alle $x \in U_\delta(a)$ gilt, dass $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

4. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x>0$. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)) \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) $x^\alpha = \exp(x \log(\alpha)) \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}} \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (d) $x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad$ für $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

5. (*Lokale Maxima.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $\xi \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum von f, falls
   (a) $\forall \varepsilon{>}0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \leq f(x)$.
   (b) $f'(\xi) = 0$ gilt.
   (c) es eine Umgebung U von ξ gibt, sodass $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in U$ gilt.
   (d) $\forall \varepsilon{>}0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x)$.

6. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
   ($\mathfrak{T}[a, b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$)
   (a) f eine Treppenfunktion ist.
   (b) $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} > \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$
   (c) Ober- und Unterintegral existieren.
   (d) $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$

2 Sätze & Resultate

7. *(Folgen & Konvergenz).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) Es gibt monotone nicht konvergente Folgen.
   (b) Jede Folge hat genau einen Grenzwert.
   (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
   (d) Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

8. (*Zur Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$.) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur (Ordnungs-)Vollständigkeit der reellen Zahlen?
   (a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
   (b) Das Intervallschachtelungsprinzip.
   (c) Jede beschränkte Folge konvergiert
   (d) Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

9. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
   (b) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion hat ein Maximum und ein Minimum.
   (c) Jede stetige Funktion ist beschränkt.
   (d) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(x_0){>}0$, dann gibt es ein Intervall $U = (x_0{-}\delta, x_0{+}\delta)$ (mit einem $\delta{>}0$) sodass $f(x){>}0$ für alle $x \in U$.

10. (*Exponentialfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$.

    (b) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

    (c) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

    (d) $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$.

11. (*Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

    (b) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

    (c) Treppenfunktionen sind differenzierbar.

    (d) Jede differenzierbare Funktion ist beschränkt.

12. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Welche Aussagen sind korrekt? Die erste Aussage des HsDI kann geschrieben werden als

    (a) $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dt = f(x)$.

    (b) $\frac{d}{dx} \int_a^b f(t)dt = f(x)$.

    (c) $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

    (d) $\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

    (a) Falls $a_n \to a$, dann ist $a_n - a$ eine Nullfolge.

    (b) $\frac{(-1)^n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

    (c) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

    (d) $\frac{n^2+4n}{n^2+3}$ ist eine Nullfolge.

14. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}<\infty$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}<\infty$.

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

15. *(Die Euler'sche Zahl).* Welche der Gleichungen stimmen?

    (a) $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

    (b) $e = \exp(1)$.

    (c) $e = 2.713$

    (d) $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

16. (*Funktionseigenschaften.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{zu?}$$

    (a) f ist auf $[0, 1]$ integrierbar.

    (b) f ist (überall) stetig.

    (c) f ist beschränkt.

    (d) f ist (überall) differenzierbar.

17. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$

    (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \quad$ für $k \in \mathbb{N}$.

    (c) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

    (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 1$

18. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar?

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 6x - 7.$

    (b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{x}.$

    (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$

    (d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right).$

4 Rechenaufgaben

19. *(Grenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} \ \to \ 0.$

    (b) $\dfrac{n^2 + 3n + 2}{2n^2 + 8n + 4} \ \to \ \dfrac{3}{8}.$

    (c) $\dfrac{n!}{n^n} \ \to \ 0.$

    (d) $\dfrac{2^n}{n^2} \ \to \ 0.$

20. *(Funktionsgrenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x^2|} = \infty.$

    (b) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0.$

    (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = -\infty.$

    (d) $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = \infty.$

21. (*Differenzieren, konkret, 1.*) Berechne die Ableitung von

$$f(x) = e^{x^2} \cos(e^x).$$

    Welche Ergebnisse sind korrekt?

    (a) $f'(x) = e^{x^2}\big(e^x \sin(e^x) - 2x \cos(e^x)\big).$

    (b) $f'(x) = e^{x^2}\big(2x \cos(e^x) - e^x \sin(e^x)\big).$

    (c) $f'(x) = 2xe^{x^2}\big(\sin(x) - \cos(e^x)\big).$

    (d) $f'(x) = 2xe^{x^2}\big(\cos(e^x) - \sin(e^x)\big).$

22. (*Differenzieren, konkret, 2.*) Welche der Rechnungen sind (für $x>0$) korrekt ?

    (a) $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

    (b) $f(x) = x^x, \quad f'(x) = x \cdot x^{x-1}$.

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad f'(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

    (d) $f(x) = |x^2|, \quad f'(x) = 2x$.

23. (*Integrieren, explizit, 1.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) $\displaystyle\int x^\alpha \, dx \; = \; \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

    (b) $\displaystyle\int e^x \, dx \; = \; \frac{e^{x-1}}{x-1}$.

    (c) $\displaystyle\int \sin(x) \, dx \; = \; \cos(x)$.

    (d) $\displaystyle\int x^n \, dx \; = \; \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

24. (*Integrieren, explizit, 2.*) Berechne

$$\int_1^3 x \log(x) \, dx.$$

    Welche Ergebnisse sind korrekt?

    (a) $\dfrac{9}{2} \log(3) - \dfrac{9}{4}$.

    (b) $\dfrac{9}{2} \log(3) - 2$.

    (c) $\dfrac{9}{4} \log(3) - 2$.

    (d) $9 \log(\sqrt{3}) - 2$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz.*

   (a) Definieren Sie (exakt!) den Begriff „beschränkte reelle Folge“ und fertigen Sie eine instruktive Skizze an. (1 Pkt)

   (b) Argumentieren Sie (in Worten), warum jede konvergente reelle Folge beschränkt ist und fertigen Sie eine Skizze an. (3 Pkte)

   (c) Formulieren Sie (exakt!) den 1. Unterpunkt (d.h. den über Konvergenz) des Quotiententests für Reihen. (1 Pkt). Diskutieren Sie die Voraussetzung im Quotiententest im Vergleich zur Bedingung

   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \forall n \geq n_0 : \tag{$*$}$$

   Was ist der Unterschied zwischen den beiden Bedingungen? Würde der Quotiententest auch mit Bedingung $(*)$ „funktionieren“? Warum (nicht)? (2 Pkte)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit.*

   (a) Definieren sie (genau!) den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ (1 Pkt) und benennen Sie den Unterschied zur Stetigkeit von f auf D. (1 Pkt)

   (b) Berechnen Sie direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $\xi \in (0, \infty)$. (2 Pkte)

   (c) Formulieren Sie anschaulich die Aussage des Mittwelwertsatzes der Differentialrechnung und fertigen Sie eine Skizze an. (2 Pkte)

   (d) Formulieren Sie (exakt!) den Satz von Rolle. (1 Pkt) Geben Sie die wesentlichen Beweisschritte an und nennen Sie alle dabei verwendeten Resultate. (4 Pkte)

3. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

   (a) Formulieren Sie (genau!) den 1. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (1 Pkt)

   (b) Geben Sie eine Beweisskizze und beschreiben Sie den Beweisverlauf in einem Satz (3 Pkte). Beantworten Sie die folgenden Fragen (je 1 Pkt).

      - Welches wichtige Resultat geht an entscheidender Stelle ein?
      - Wo wird die Stetigkeit (der Ausgangsfunktion) verwendet?