NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2020, 2. Termin, 30.9.2020

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung"** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/4 Punkt abgezogen, Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(8)	(10)	(6)	(24)	(48)	

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls

   (a) außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele Folgenglieder a_n liegen.

   (b) in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.

   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N.$

   (d) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2. (*Uneigentliche Konvergenz.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine reelle Folge (a_n) ist bestimmt konvergent gegen $+\infty$, falls

   (a) $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$

   (b) $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n > K.$

   (c) falls sie unbeschränkt ist.

   (d) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall K \in \mathbb{R} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$

3. (*Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Eine reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls

   (a) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$

   (c) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N : \ |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon.$

   (d) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq m \geq N : \ |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon.$

4. *(Konvergenz von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : D \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, a ein Berührpunkt von D und $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$. Es gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, falls

   (a) für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

   (b) $\forall (x_n) \in D : \quad x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to c.$

   (c) $\forall (x_n) \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \to a$ und $f(x_n) \to c.$

   (d) es eine Folge (x_n) in D gibt mit $x_n \to a$ und $f(x_n) \to c$.

5. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei ξ ein Punkt im Intervall I und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist differenzierbar in ξ, falls

   (a) $\lim\limits_{\substack{x\to\xi \\ x\neq\xi}} \dfrac{f(\xi)-f(x)}{x-\xi}$ existiert und endlich ist.

   (b) $\lim\limits_{\substack{x\to\xi \\ x\neq\xi}} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ existiert.

   (c) $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \to a \quad (x \to \xi,\ x \neq \xi)$, für ein $a \in \mathbb{R}$.

   (d) $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.

6. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
($\mathfrak{T}[a,b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$)

   (a) $$\inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\} \geq \sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\ \psi \leq f \right\}.$$

   (b) f differenzierbar ist.

   (c) Ober- und Unterintegral übereinstimmen.

   (d) $\inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\}$ und $\sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\ \psi \leq f \right\}$ existieren.

2 Sätze & Resultate

7. *(Folgen & Konvergenz).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Es gibt unbeschränkte, konvergente Folgen.

   (b) Jede monotone Folge ist beschränkt.

   (c) Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.

   (d) Jede monotone, beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

8. *(Reihenkonvergenz.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls

   (a) die Folge der Partialsummen konvergiert.

   (b) $\left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)_m$ konvergiert.

   (c) $a_n \to 0$.

   (d) $\left(\sum_{n=0}^{m} a_n\right)_m < \infty$.

9. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Jede stetige Funktion bildet Intervalle wieder auf Intervalle ab.

   (b) Es gibt stetige Funktionen, die differenzierbar sind.

   (c) Jede stetige Funktion ist monoton.

   (d) Jede stetige Funktion hat ein Maximum und ein Minimum.

10. (*Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow f$ streng mon. fallend auf $[a, b]$.

    (b) f hat ein Maximum in $[a, b]$.

    (c) Hat f in $\xi \in [a, b]$ eine lokale Extremstelle, dann gilt $f'(\xi) = 0$.

    (d) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow f$ monoton wachsend auf $[a, b]$.

11. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind korrekt? Die zweite Aussage des HsDI kann geschrieben werden als

    (a) $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$.

    (b) $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

    (c) $\int_a^x F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

    (d) $\int_a^b f'(t)dt = F(b) - F(a)$.

12. (*Logarithmusfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) $\log(x)>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

    (b) $\log(x+y) = \log(x)\,\log(y)$.

    (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha>0)$.

    (d) $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

    (a) $(-1)^n n$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

    (b) $\left(\dfrac{n}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

    (c) $\dfrac{n^2+4n^n}{3+n+n^3}$ ist keine Nullfolge.

    (d) Falls (a_n) und (b_n) konvergieren und $a_n<b_n$ für alle n gilt, dann gilt auch $\lim a_n < \lim b_n$.

14. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut.

    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$.

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n^2}$ konvergiert.

15. *(Sinus und Cosinus).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

    (b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

    (c) $\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$.

    (d) $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

16. (*Stetige Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - 3|$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$.

    (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$.

    (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$.

17. (*Funktionseigenschaften.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| \quad \text{zu?}$$

    (a) f ist monoton.

    (b) f ist (überall) differenzierbar.

    (c) f ist auf $[-1, 1]$ integrierbar.

    (d) f ist (überall) stetig.

18. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = xe^{x-1}$.

    (b) Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar.

    (c) Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x \in (0, \infty))$ ist (überall) differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

    (d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$ ist (überall) differenzierbar.

4 Rechenaufgaben

19. *(Grenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind für $n \to \infty$ korrekt?

    (a) $(-1)^n \sqrt[n]{3} \to 0.$

    (b) $\frac{3^n}{n!} \to \infty.$

    (c) $\frac{3n^2 + 2n + n^3}{2n^2 + 8n + 4} \to \frac{3}{2}.$

    (d) $\sqrt{n^2 + 2n} - n \to 1.$

20. *(Reihenkonvergenz konkret).* Welche der folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$

    (b) $a_n = \frac{1+n}{n}.$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

    (d) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(n-2)(n+3)}.$

21. (*Differenzieren, konkret, 1.*) Berechne die Ableitung von

$$f(x) = e^x \sin(e^{x^2}).$$

    Welche Ergebnisse sind korrekt?

    (a) $f'(x) = e^x \sin(e^{x^2}) + 2xe^{x^3} \cos(e^{x^2}).$

    (b) $f'(x) = e^x \big(\cos(e^{x^2}) e^{x^2} + \sin(e^{x^2}) \big).$

    (c) $f'(x) = e^x \sin(e^{x^2}) + 2xe^{x+x^2} \cos(e^{x^2}).$

    (d) $f'(x) = e^x \big(\sin(e^{x^2}) + 2x \cos(e^{x^2}) e^{x^2} \big).$

22. (*Differenzieren, konkret, 2.*) Welche der Rechnungen sind korrekt (jeweils für x, sodass $f'(x)$ existiert) ?

    (a) $f(x) = e^{\cos(x)} \quad f'(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$.

    (b) $f(x) = \cos(\log(x)), \quad f'(x) = \sin(\log(x))\dfrac{1}{x}$.

    (c) $f(x) = x^x, \quad f'(x) = (1 + \log(x))f(x)$.

    (d) $\log\sqrt{1 + \sin^2(x)}, \quad f'(x) = \dfrac{\sin(x)\ \cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$.

23. (*Integrieren, explizit, 1.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\cos^2(x)$.

    (b) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx \;=\; -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

    (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx \;=\; \tan(x)$.

    (d) $\displaystyle\int e^x\,dx \;=\; e^x$.

24. (*Integrieren, explizit, 2.*) Berechne $\displaystyle\int_1^2 x^2\log(x)\,dx$. Welche Ergebnisse sind korrekt?

    (a) $\dfrac{1}{9}\Big(8\log(2) - 7\Big)$.

    (b) $\dfrac{7}{3}\log(2) - \dfrac{7}{9}$.

    (c) $\dfrac{1}{9}\Big(8\log(8) - 7\Big)$.

    (d) $\dfrac{8}{3}\log(2) - \dfrac{7}{9}$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz.*
   (a) Definieren Sie (exakt!) den Begriff „Cauchy-Folge“ und erklären Sie (in eigenen Worten), was das Wesen einer Cauchy-Folge ist. (2 Pkte)
   (b) Diskutieren Sie (in eigenen Worten) das Verhältnis von konvergenten (reellen) Folgen zu Cauchy-Folgen. Was hat das mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu tun? (3 Pkte)
   (c) Beweisen sie (exakt!), dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Welches wesentliche Resultat über Reihenkonvergenz haben Sie dabei verwendet? (3 Pkte)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit.*
   (a) Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Formulieren Sie (exakt!) unter Verwendung von Folgen in D die Bedingung, dass f stetig in einem Punkt $a \in D$ ist (Folgenstetigkeit). (1 Pkt)
   (b) Beschreiben Sie (in eigenen Worten), wie man unter Verwendung der Folgenstetigkeit beweist, dass die Summe zweier stetiger Funktionen wieder stetig ist. (2 Pkte)
   (c) Formulieren sie (exakt!) jenes Resultat, das besagt, dass differenzierbare Funktionen auch stetig sind und beweisen Sie es. Begründen Sie jeden Beweisschritt explizit! (4 Pkte)
   (d) Formulieren Sie (exakt!) das Resultat, das die Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt mittels linearer Approximation ausdrückt. Fertigen Sie auch eine Skizze an und zeichnen sie insbesondere den Fehler zwischen linearer Approximation und ursprünglicher Funktion ein. (3 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren.*
   (a) Formulieren Sie (exakt!) die Regel zur partiellen Integration. (1 Pkt)
   (b) Berechnen Sie explizit eine Stammfunktion von $\log(x)$. (2 Pkte)
   (c) Diskutieren Sie (in eigenen Worten) die Aussage: Differenzieren und Integrieren sind im Wesentlichen „inverse Operationen“. (3 Pkte)