1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt: Der Punkt a ist ein Häufungswert von (a_n), falls

   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (b) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (c) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$

   (d) [true] in jeder ε-Umgebung von a alle Folgenglieder a_n liegen.

2. *(Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *nicht* stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls

   (a) [true] es eine reelle Folge (x_n) gibt mit $x_n \to a$ aber $f(x_n) \not\to f(a)$.

   (b) [false] für jede reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ auch $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

   (c) [true] f in a einen Sprung hat.

   (d) [true] $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ gilt.

3. (*Absolute Konvergenz.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

   konvergiert absolut, falls

   (a) [false] $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \infty$.

   (b) [false] sie konvergiert und unendlich viele positive Glieder a_n hat.

   (c) [true] sie konvergiert und nur endlich viele negative Glieder a_n hat.

   (d) [false] sie nicht alternierend ist.

4. (*Logarithmus.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für die Logartihmusfunktion

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

   gilt:

   (a) [false] $\log(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

   (b) [true] $\log$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

(c) [true] $\log$ ist bijektiv.

(d) [false] $x = \exp(y) \iff x = \log(y)$.

5. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in einem Punkt ξ im Intervall I, falls

   (a) [true] $\lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f(\xi) - f(x)}{x - \xi}$ existiert und endlich ist.

   (b) [true] $\lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$ existiert und endlich ist.

   (c) [false] es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ gibt sodass,

   $$f(\xi + h) - f(\xi) = \alpha + r(h) \text{ und } \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

   (d) [true] $\lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0.$

6. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f, falls

   (a) [false] $F'(x) = f(x) + C$ gilt.

   (b) [false] $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ gilt.

   (c) [true] es eine Stammfunktion $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ von f gibt und $F - G = c$ für eine Konstante c gilt.

   (d) [true] $\Big(F(x) + C\Big)' = f(x)$ gilt.

2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen & Konvergenz, 1.)* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Jede konvergente Folge hat einen Häufungswert.

   (b) [true] Gilt $a_n \to \infty$, dann auch $1/a_n \to 0$.

   (c) [false] Unbeschränkte Folgen sind bestimmt divergent.

   (d) [false] Kehrwerte von Nullfolgen divergieren bestimmt nach $\pm\infty$.

2. *(Folgen & Konvergenz, 2.)* Von der reellen Folge a_n ist bekannt, dass sie unbeschränkt ist. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

(a) [false] a_n hat keinen Häufungswert.
(b) [false] a_n hat genau einen Häufungswert.
(c) [false] a_n hat mehrere Häufungswerte.
(d) [true] Keine der anderen Aussagen ist korrekt.

3. *(Nullstellen.)* Aus welchen Aussagen kann man korrekter Weise schließen, dass
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(-1) = -7$$
eine Nullstelle hat?

   (a) [true] f ist stetig und $f(-7) = 1$.
   (b) [false] f ist monoton und $f(1) = 1$.
   (c) [false] f ist stetig und $f(1) = -1$.
   (d) [true] f ist stetig und monoton und $f(1) = 10$.

4. *(Extremstellen.)* Welche der Aussagen sind korrekt? Die Funktion
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$
hat ein Extremum

   (a) [true] in irgend einem Punkt $\xi \in [a, b]$, falls f stetig ist.
   (b) [false] in einem Punkt $\xi \in (a, b)$, falls f differenzierbar ist und $f'(\xi) = 0$ gilt.
   (c) [true] in irgend einem Punkt $\xi \in [a, b]$, falls f differenzierbar ist.
   (d) [false] in irgend einem Punkt $\xi \in (a, b)$, falls f stetig ist.

5. *(Monotoniekiterium.)* Welche der Aussagen sind korrekt? Eine stetige Funktion
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$
sei zusätzlich differenzierbar auf (a, b). Dann gilt

   (a) [true] f ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$, falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.
   (b) [true] f ist streng monoton wachsend auf (a, b), falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.
   (c) [false] $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, falls f streng monoton wachsend auf $[a, b]$ ist.

(d) [true] $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, falls f streng wachsend auf $[a, b]$ ist.

6. *(Hauptsatz der Differential und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Jede (auf einem Intervall) stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

   (b) [true] Jede (auf einem Intervall) differenzierbare Funktion hat eine Stammfunktion.

   (c) [false] Jede (auf einem Intervall) integrierbare Funktion hat eine Stammfunktion.

   (d) [true] Jede (auf einem Intervall) stetig differenzierbare Funktion hat eine Stammfunktion.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Grenzwerte.)* Gegeben ist eine reelle Folge (x_n), die auf Konvergenz untersucht werden soll. Es gelte, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 17\,.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] (x_n) ist konvergent mit $\lim x_n = 17 + 1 = 18$.

   (b) [true] (x_n) ist konvergent mit $\lim x_n = 17$.

   (c) [false] (x_n) kann konvergent oder divergent sein. Das lässt sich aufgrund der Angabe nicht entscheiden.

   (d) [false] (x_n) ist konvergent mit $\lim x_n = 17 - 1 = 16$.

2. *(Die Vorzeichenmaschine konvergiert doch nicht!)* Jemand beweist, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert und zwar mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0\,.$$

   Dafür wird folgendes Argument bemüht:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \Big((-1)^n + (-1)^{n+1}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^n = 2 \lim_{n\to\infty} (-1)^n \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0
\end{aligned}$$

   Das ist natürlich falsch! Aber wo liegt/liegen der/die Fehler?

(a) [false] Das 2. Gleichheitszeichen ist falsch.

(b) [true] Das 3. Gleichheitszeichen ist falsch.

(c) [false] Das 4. Gleichheitszeichen ist falsch.

(d) [false] Die Schlussfolgerung bei „$\Longrightarrow$" ist falsch.

3. *(Stetigkeit aus der Definition.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = 3x$$

in einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ folgt aus dem ε-δ-Kriterium da wir

(a) [false] zu $\delta > 0$ beliebig gegeben, $\varepsilon = \delta/3$ wählen können.

(b) [false] zu $\delta > 0$ beliebig gegeben, $\varepsilon = 3\delta$ wählen können.

(c) [false] zu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, $\delta = 3\varepsilon$ wählen können.

(d) [true] zu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, $\delta = \varepsilon/3$ wählen können.

4. *(Beschränkte Funktionen.)* Welche der Aussagen sind korrekt? Eine Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

ist beschränkt, falls

(a) [true] $f(a) = 0$ gilt und sie monoton fallend ist.

(b) [true] sie stetig ist.

(c) [false] falls sie stetig auf (a, b) ist.

(d) [false] sie differenzierbar auf (a, b) ist und $f(a) = f(b) = 0$ gilt.

5. *(Funktionsgrenzwerte.)* Gegeben sind zwei Funktionen $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und es gelte

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [false] Es gilt $\lim_{x\to 0} f(x)\, g(x) = 0$, denn $f(x)\, g(x) = 0\, g(x) = 0$.

(b) [false] Es gilt $\lim_{x\to 0} \Big(f(x)\, g(x)\Big) = \lim_{x\to 0} f(x)\, \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

(c) [false] Es gilt $\lim_{x\to 0} f(x)\, g(x) \neq 0$.

(d) [true] Keine der anderen Aussagen ist korrekt.

6. *(Funktionseigenschaften.)* Welche der folgenden Implikationen gelten für eine Funktion
$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad ?$$
   (a) [false] f stetig $\Longrightarrow$ f beschränkt $\Longrightarrow$ f integrierbar
   (b) [true] f stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar $\Longrightarrow$ f beschränkt
   (c) [false] f integrierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f beschränkt
   (d) [false] f integrierbar $\Longrightarrow$ f beschränkt $\Longrightarrow$ f stetig

4 Konkrete Beispiele

1. *(Reihenkonvergenz, 1.)* Welche der folgenden Argumente begründet korrekt die Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad ?$$
   (a) [true] Der Quotiententest zeigt die Konvergenz dieser Reihe.
   (b) [false] $\frac{n!}{n^n} \to 0$ und daher konvergiert die Reihe.
   (c) [false] $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ und daher konvergiert die Reihe.
   (d) [true] $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ und daher konvergiert die Reihe.

2. *(Komplexe Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Die komplexe Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\,\mathrm{i}\Big)^n$$
   (a) [false] ist konvergent, denn $|\frac{3}{4}| < 1$.
   (b) [false] ist konvergent, denn $|\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\,\mathrm{i}| < 1$.
   (c) [false] ist divergent, denn $|\frac{3}{4}| > 1$.
   (d) [true] ist divergent, denn $|\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\,\mathrm{i}| > 1$.

3. *(Reihenkonvergenz, 2.)* Ist die folgende Gleichung korrrekt
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{25} + \ldots$$
und welche der Argumente treffen zu?

(a) [false] Auf beiden Seiten stehen dieselben Summanden, nur in anderer Reihenfolge. Daher gilt die Gleichung.

(b) [false] Auf beiden Seiten handelt es sich um konvergente Reihen, daher stimmt die Gleichung.

(c) [true] Die Reihe auf der linken Seite ist absolut konvergent und daher gilt die Gleichheit.

(d) [false] Die Reihe auf der rechten Seite divergiert und daher ist die Gleichung falsch.

4. *(Differenzierbarkeit.)* Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] f ist in $\xi = 0$ differenzierbar und die Tangente in $\xi = 0$ ist die Gerade $y = -x$.

(b) [false] f ist in $\xi = 0$ differenzierbar und es gilt $\lim_{0 \neq x \to 0} f'(x) = -1$

(c) [false] f ist in $\xi = 0$ nicht differenzierbar, weil der Limes $\lim_{0 \neq x \to 0} f'(x)$ nicht existiert.

(d) [true] f ist in $\xi = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{0 \neq x \to 0} f'(x) = -\infty$.

5. *(Kurvendiskussion.)* Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4$$

ist ein Beispiel dafür, dass eine zweimal differenzierbare Funktion an der Stelle $\xi = 0$

(a) [false] ein lokales Extremum haben muss, wenn $f'(0) = 0$ und $f''(x) = 0$ gilt.

(b) [false] kein lokales Extremum haben muss, wenn $f'(0) = 0$ und $f''(x) = 0$ gilt.

(c) [true] ein lokales Extremum haben kann, wenn $f'(0) = 0$ und $f''(x) = 0$ gilt.

(d) [false] ein lokales Extremum haben kann, wenn $f'(0) = 0$ und $f''(x) \neq 0$ gilt.

6. *(Uneigentliches Integral.)* Welche der Aussagen über das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \cos(x)\, dx$$

sind korrekt?

(a) [false] Das Integral hat den Wert 0, denn $\cos$ ist periodich und es gilt

$$\int_0^\pi \cos(x)\, dx = \sin(x) \mid_0^\pi = 0\,.$$

(b) [false] Das Integral hat den Wert 0, denn $\cos$ ist periodich und es gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx = \sin(x) \mid_0^{2\pi} = 0\,.$$

(c) [false] Das Integral hat den Wert 0, denn es gilt

$$\int_0^\infty \cos(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\,2\pi} \cos(x)\, dx = 0\,.$$

(d) [true] Das Integral existiert nicht, weil

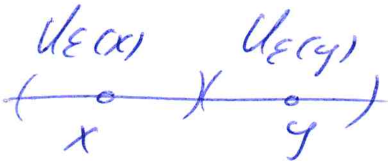
$$\int_0^\infty \cos(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \cos(x)\, dx\,.$$

nicht existiert.

Ausarbeitung 3. Termin 21012010

$\boxed{1}$ (a) Falls $x_n \to x$ konvergiert, dann sind in jeder ε-Umgebung um x fast alle x_n; daher bleiben für einen zweiten „Grenzwertkandidaten" nicht genug Folgenglieder über...

<u>Formaler:</u> Ang. x & y wären Grenzwerte von x_n mit $x \neq y$; dann wähle $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$.



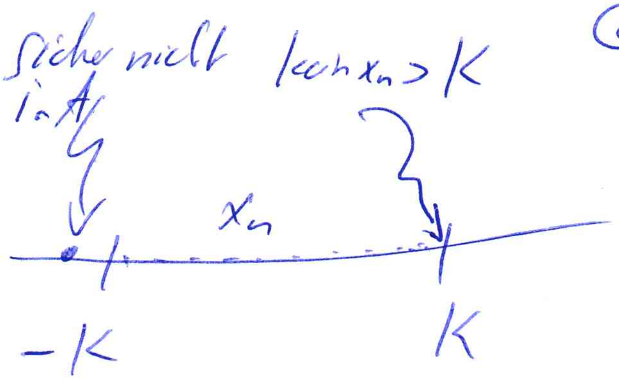
Damit sind $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(y)$ disjunkt. Liegen fast alle x_n in $U_\varepsilon(x)$, bleiben also für $U_\varepsilon(y)$ nur endlich viele x_n übrig und y ist daher <u>doch nicht</u> Grenzwert von x_n.

(b) ZZ: x_n beschränkt $\Rightarrow$ x_n hat einen Häufungswert

<u>Schritt 1:</u> Mittels der Vollständigkeit wird ein Kandidat für den HW gefunden. Lt. Voraussetzung gilt $|a_n| \leq K$ (für ein passendes K). Die Hauptidee ist es nun die Menge A zu betrachten, die aus Pkten besteht die nur von höchstens endl. vielen x_n übertroffen werden:

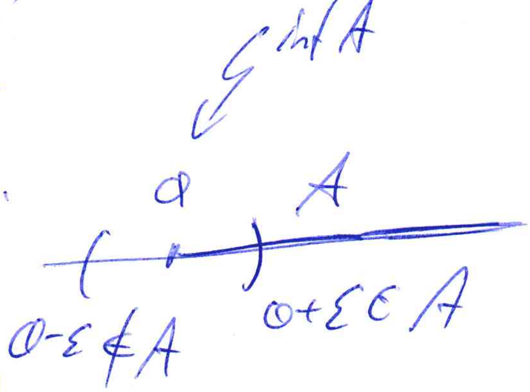
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x_n > x \text{ für höchstens endl. viele } n\}$$

- $A \neq \emptyset$, denn $K \in A$
- A ist n.u.b., denn jedes $x < -K$ liegt in A^c



Also hat A ein Infimum a.

2. Schritt: a ist Hw von x_n.



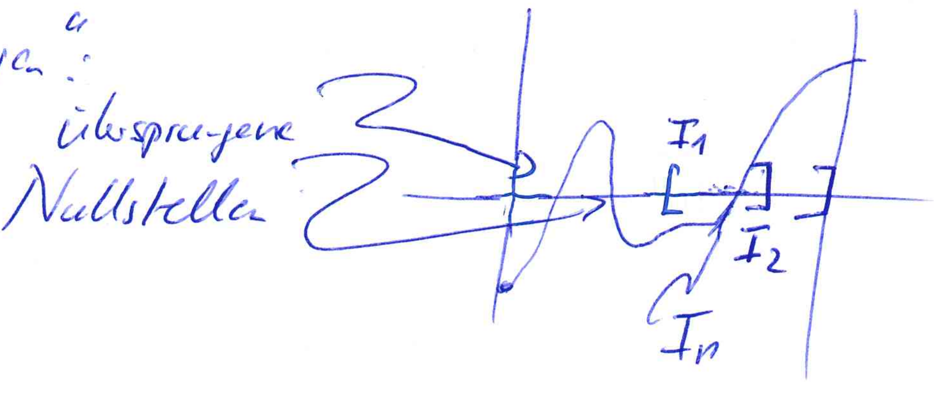
Weil $a+\varepsilon \in A$ liegen fast alle x_n links von $a+\varepsilon$

Weil $a-\varepsilon \notin A$ liegen unendlich viele x_n rechts von $a-\varepsilon$

Also liegen insgesamt unendlich viele x_n in $U_\varepsilon(a)$

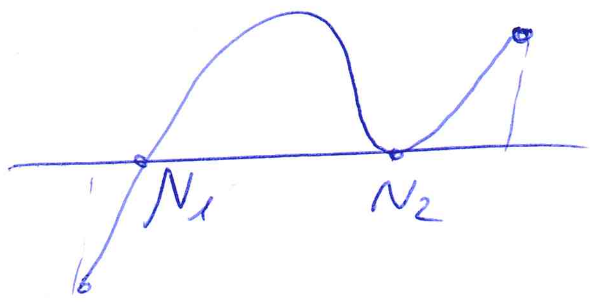
Weil ε beliebig war ist a Hw von x_n

$\boxed{2}$(a) Die Nullstelle ist nicht eindeutig, denn erstens kann die Intervallhalbierung im Bösen Nullstellen „überspringen“:

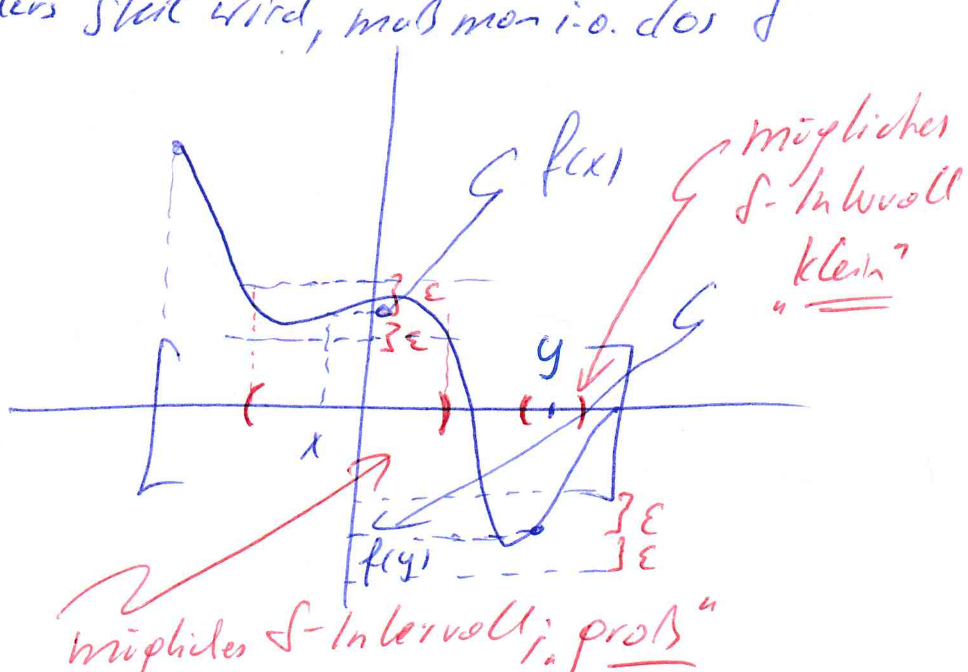


3

Zweitens gibt es Gegenbeispiele; siehe ebenfalls oben.
Ja, f kann auch geradzahlig viele NST haben, z.B.

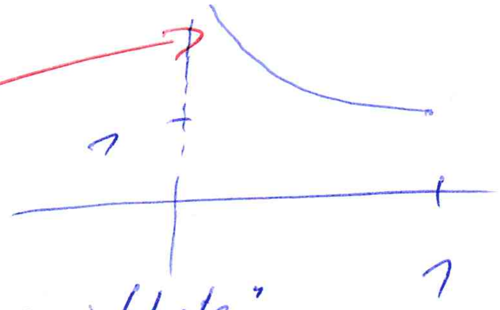


(b) Der Unterschied zw. der Stetigkeit und der glm. Stetigkeit ist, dass bei der glm. Stetigkeit bei gegebenem $\varepsilon > 0$ das δ nicht vom Pkt abhängen darf. D.h. es muß für alle $x \in [a,b]$ ein einheitliches „Sicherheitsintervall" um x geben, sodass alle Punkte darin ε-nahe an f(x) liegen. Wenn f besonders steil wird, muß man i.a. das δ klein wählen:



Wenn f auf einem kp. Intervall stetig ist, kann es gegen den Rand hin nicht beliebig steil werden (im Unterschied zu $1/x$ auf $(0,1)$)

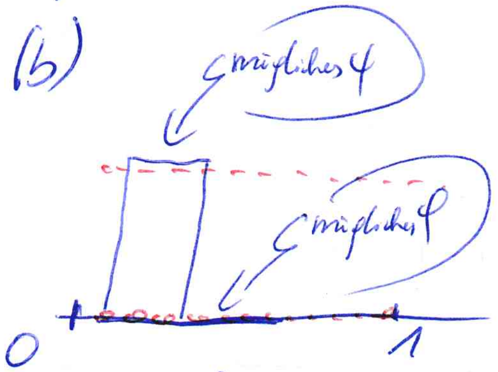
„kaputt"
„& wird immer steiler"



Daher ist so ein f dann auch glm. stetig, weil man das „vorsichtigste" kleinste δ wählen kann.

$\boxed{3}$ (a) Teil eins des HS-DI: $\int_a^b f(t)\,dt = F\Big|_a^b$ für jede Stammfunktion F von f ermöglicht im wesentlichen das praktische Berechnen von Integralen. Statt aufwendiger Ober- & Unterintegralen oder Riemann-Summen kann also die Fläche unter einem Funktionsgraphen einfach mittels Stammfkt berechnet werden.

(b)



- Jede Treppenfkt ψ mit $\psi > \chi_{\mathbb{Q}}$ muß mindestens den Wert 1 haben
- Jede Treppenfkt φ mit $\varphi < \chi_{\mathbb{Q}}$ muß ≤ 0 bleiben.

$$\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \psi \geq 1, \quad \int_0^1 \varphi \leq 0$$

Daher $\int^* \chi_{\mathbb{Q}} \neq \int_* \chi_{\mathbb{Q}}$